باب 14

5168CH14

اہتزازات
(OSCILLATIONS)

14.1 تعارف (INTRODUCTION)

ہم اپنی روزانہ زندگی میں حرکت کی بہت سی قسمیں دیکھتے ہیں۔ ان میں سے کچھ کے بارے میں آپ پہلے سیکھ چکے ہیں، مثلاً مستقیم حرکت (Rectilinear Motion) یا ایک محرک غُلّا (Projectile) کی حرکت۔ لیکن یہ حرکتیں اپنے آپ کو دہراتی نہیں ہیں۔ ہم نے یکساں دائری حرکت (Uniform Circular Motion) اور سیاروں کی مداری حرکت (Orbital Motion) کے بارے میں بھی سیکھا ہے۔ ان صورتوں میں، حرکت کچھ وقفہ وقت کے بعد دہرائی جاتی ہے، یعنی کہ، یہ حرکت، دوری (periodic) ہے۔ اپنے بچپن میں آپ نے پالنے اور جھولے میں جھولنے کے مزے لیے ہوں گے۔ یہ دونوں حرکتیں بھی اپنے آپ کو دہرانے والی ہیں مگر ایک سیارے کی دوری حرکت سے مختلف ہیں۔ ان میں شے ایک اوسط مقام کے گرد اِدھر اُدھر (آگے پیچھے، دائیں بائیں، to and fro) حرکت کرتی ہے۔ ایک گھڑی کا پنڈولم بھی اسی طرح کی حرکت کرتا ہے۔ درختوں کی شاخیں اور پتیاں ہوا میں اہتزاز کرتی (Oscillate) ہیں۔ لنگر انداز کشتیاں اوپر نیچے ڈولتی ہیں اور کار کے انجنوں کے پسٹن بھی آگے پیچھے حرکت کرتے ہیں۔ یہ تمام اشیاء ایک دوری آگے پیچھے حرکت کرتے ہیں۔ ایسی حرکت کو اہتزازی حرکت (Oscillatory Motion) کہتے ہیں۔ اس باب میں ہم اس حرکت کا مطالعہ کریں گے۔

اہتزازی حرکت کا مطالعہ طبیعیات کا بنیادی حصہ ہے۔ اس کے تصورات بہت سے طبعی مظاہر کو سمجھنے کے لیے درکار ہوتے ہیں۔ آلاتِ موسیقی، جیسے سِتار، گِٹار یا وائلن میں، ہم ارتعاش (Vibration) کرتی ہوئی ڈوریاں (Strings) دیکھتے ہیں، جن سے خوش کن آوازیں نکلتی ہیں۔ ڈھولک میں جھلّی اور ٹیلی فون اور سماعتی نظاموں (Speaker Systems) میں ڈایا فرام (Diaphragms)، اوپر نیچے (آگے پیچھے)، اپنے اوسط مقام کے گرد، حرکت کرتے ہیں۔ ہوا کے مالیکیولوں کے ارتعاش، آواز کی اشاعت (Propagation) کو ممکن بناتے ہیں۔ اسی طرح، ایک ٹھوس شئے میں ایٹم اپنے اوسط مقام کے گرد اہتزاز کرتے ہیں اور درجۂ حرارت کا احساس دلاتے ہیں۔ ریڈیو، ٹی۔وی۔ اور سیارچوں کے انٹینا میں الیکٹران اہتزاز کرتے ہیں اور اطلاعات پہنچاتے ہیں۔

دوری حرکت کو بیان کرنے کے لیے عام طور پر اور اہتزازی حرکت کو بیان کرنے کے لیے خصوصاً کچھ بنیادی تصورات، جیسے دَور (Period)، تعدد (Frequency)، نقل (Displacement)، بسعت (Amplitude) اور فیز (Phase)، کی ضرورت ہوتی ہے۔ یہ تصورات اگلے حصے میں واضح کیے گئے ہیں۔

14.2 دَوری اور اہتزازی حرکتیں (PERIODIC AND OSCILLATORY MOTIONS)

شکل 14.1 میں کچھ دوری حرکتیں دکھائی گئی ہیں۔ فرض کیجیے ایک کیڑا ایک پتّی پر چڑھتا ہے اور نیچے گر جاتا ہے۔ وہ اپنے آغازی نقطے پر واپس آ جاتا ہے اور پھر متماثل (Identically) طور پر یہی عمل دہراتا ہے۔ اگر آپ فرش سے اس کی اونچائی اور وقت میں گراف کھینچیں تو یہ کچھ شکل (a)14.1 میں دکھائے گئے گراف جیسا ہوگا۔ اگر ایک بچہ ایک سیڑھی پر چڑھتا ہے، پھر نیچے اترتا ہے اور پھر یہی عمل متماثل طور پر (بالکل اسی طرح) دہراتا ہے، تو اس کی زمین سے اونچائی شکل (b) 14.1 جیسی نظر آئے گی۔ جب آپ ایک گیند کو زمین پر مار کر اچھالتے ہیں اور پھر پکڑ لیتے ہیں۔ اور یہ کھیل کھیلتے ہیں تو آپ کی ہتھیلی اور زمین کی درمیان اونچائی اور وقت میں گراف شکل (c) 14.1 جیسا ہوگا۔ نوٹ کریں کہ شکل (c)14.1 میں دکھائے گئے دونوں خمیدہ (Curved) حصّے ایک مکافی (Parabola) کے تراشے (Sections) ہیں، جو نیوٹن کی حرکت کی مساواتوں (دیکھیے حصہ 3.1) سے اخذ کیے جا سکتے ہیں۔

$$h = ut + \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{(نیچے کی جانب حرکت کے لیے)}$$

$$h = ut - \frac{1}{2}gt^2 \quad \text{(اوپر کی جانب حرکت کے لیے)}$$

جہاں ہر صورت میں u کی قدریں مختلف ہیں۔ یہ سب دوری حرکت کی مثالیں ہیں۔ اس لیے، ایک ایسی حرکت جو اپنے آپ کو ایک باقاعدہ (یکساں Regular) وقفہ وقت کے بعد دہراتی ہے، دوری حرکت (Periodic Motion) کہلاتی ہے۔

شکل **14.1** : دَوری حرکت کی مثالیں - ہر صورت میں دور **T** دکھایا گیا ہے۔

اکثر ایک جسم جب دَوری حرکت کر رہا ہوتا ہے تو کہیں اس کے راستے کے اندر ایک متوازن مقام ہوتا ہے۔ جب جسم اس مقام پر ہوتا ہے تو اُس پر کوئی باہری قوت نہیں لگ رہی ہوتی۔ اس لیے اگر اُسے اِس مقام پر حالتِ سکون میں چھوڑ دیا جائے، تو وہ ہمیشہ رہے گا۔ اگر جسم کو اس مقام سے تھوڑا سا منتقل (Displace) کر دیا جائے، تو ایک قوت لگنے لگتی ہے جو اس جسم کو واپس اس مقام پر لانے کی کوشش کرتی ہے (توازن کے مقام پر)۔ اس طرح اہتزاز (Oscillations) یا ارتعاش (Vibrations) پیدا ہوتے ہیں۔ مثلاً، ایک پیالے میں رکھی ہوئی گیند، پیالے کے پیندے پر توازن میں ہوگی۔ اگر اس نقطے سے تھوڑی سی منتقل (Displace) کر دی جائے، تو یہ پیالے میں اہتزاز کرنے لگے گی۔ ہر اہتزازی حرکت دوری ہوتی ہے لیکن ہر دوری حرکت، ضروری نہیں ہے کہ، اہتزازی ہو۔ دائری حرکت ایک دوری حرکت ہے، لیکن یہ اہتزازی نہیں ہے۔

اہتزازات اور ارتعاشات (Vibrations) میں کوئی اہم فرق نہیں ہے۔

ایسا لگتا ہے کہ جب تعدد (Frequenty) کم ہوتا ہے تو ہم اسے اہتزاز (Oscillations) کہتے ہیں (جیسے پیڑ کی ایک شاخ کا اہتزاز) اور جب تعدد زیادہ ہوتا ہے، تو اسے ارتعاش (Vibration) کہتے ہیں (جیسے ایک آلہ موسیقی کے تاروں کا ارتعاش)

سادہ ہارمونی حرکت (Simple Harmonic Motion)، اہتزازی حرکت کی سادہ ترین شکل ہے۔ یہ حرکت اس وقت پیدا ہوتی ہے جب اہتزاز کرنے والے جسم پر لگ رہی قوت، اہتزاز کے کسی بھی نقطے پر، اوسط مقام (Mean position) سے، جو مقامِ توازن بھی ہے، نقل (Displacement) کے راست متناسب ہوتی ہے۔ مزید، اس کے اہتزاز میں، کسی بھی نقطے پر، اس کی سمت اوسط مقام (Mean Position) کی جانب ہوتی ہے۔

عملی صورت میں، اہتزاز کرتے ہوئے اجسام، آخرکار، اپنے متوازن مقامات پر، حالتِ سکون میں آجاتے ہیں، جس کی وجہ ان پر کام کر رہی رگڑ کی قوت اور دوسری اسرافی وجوہات ہیں۔ لیکن پھر بھی کسی بیرونی دَوری وسیلے کے ذریعے انھیں اہتزاز کرتے رہنے پر مجبور کیا جاسکتا ہے۔ ہم تعری (Damped) اور جبری (Forced) اہتزازات کے مظاہر سے اس باب کے آخر میں بحث کریں گے۔

کسی بھی مادی وسیلے (Medium) کو آپس میں منسلک کیے ہوئے (Coupled) اہتزاز کاروں (Oscillators) کی ایک بڑی تعداد کا مجموعہ تصور کیا جاسکتا ہے۔ ایک وسیلے کے اجزائے ترکیبی کے مجموعی اہتزازات اپنے آپ کو لہر (Wave) کی شکل میں ظاہر کرتے ہیں۔ لہروں کی مثالوں میں، پانی کی لہریں، بھونچالی لہریں زلزلے کی لہریں (Seismic Waves) برق مقناطیسی لہریں (Electromagnetic Waves) شامل ہیں۔ ہم لہر مظہر اگلے باب میں پڑھیں گے۔

14.2.1 دَور اور تعدد (Period and frequency)

ہم سیکھ چکے ہیں کہ ہر وہ حرکت جو اپنے آپ کو ایک متعین وقفہ کے بعد دہراتی ہے، دوری حرکت کہلاتی ہے۔ وہ سب سے چھوٹا وقفہ جس کے بعد حرکت دہرائی جاتی ہے، دور **(Period)** کہلاتا ہے۔ آیئے دور T کو علامت T سے ظاہر کرتے ہیں۔ اس کی SI اکائی سیکنڈ ہے۔ ایسی دوری حرکتوں کے لیے، جو سیکنڈ کے پیمانے کے لیے، بہت تیز یا بہت سست رفتار ہوں، دوسری وقت کی اکائیاں، سہولت کے لحاظ سے، استعمال کی جاتی ہیں۔ ایک کوارٹز کی قلم (Quartz Crystal) کے ارتعاش کا دور مائیکروسیکنڈ Microscond, 10^{-6} s کی اکائی میں ظاہر کیا جاتا ہے، جس کا مخفف μs ہے دوسری طرف، سیارہ عطارد (Mercury) کا مداری دور (Orbital Period) 88 زمین دن ہے۔ ہیلے (Halley) کا دم دار ستارہ (Comet) ہر 76 برس کے بعد نظر آتا ہے۔

T کا مقلوب (Reciprocal)، فی اکائی وقت میں دہرائے جانے کی تعداد دیتا ہے۔ یہ مقدار، **دوری حرکت کا تعدد (Frequency)** کہلاتی ہے۔ اسے علامت 'v' سے ظاہر کرتے ہیں۔ v اور *T* کے درمیان رشتہ ہے:

$$v = 1/T \qquad (14.1)$$

اس لیے، v کی اکائی s^{-1} ہے۔ ریڈیائی لہروں کے دریافت کرنے والے ہینرک رڈولف ہرٹز (Heinrich Rudolph Hertz) (1857-1984) کے نام پر تعدد کی اکائی کو ایک مخصوص نام دیا گیا ہے۔ اسے ہرٹز (Hertz) کہتے ہیں، جس کا مخفف Hz ہے۔

$$1\,(\text{ہرٹز}) = 1\,\text{Hz} = 1\,(\text{اہتزاز فی سیکنڈ}) = 1\,s^{-1} \qquad (14.2)$$

نوٹ کریں کہ ضروری نہیں ہے کہ تعدد صحیح عدد ہی ہو۔

مثال 14.1 : اوسطاً، ایک انسانی دل ایک منٹ میں 75 مرتبہ دھڑکتا ہے۔ اس کے تعدد اور دور کا حساب لگایئے۔

جواب: دل کے دھڑکنے کا تعدد = 75/(1 منٹ)

$= 75/(60\ s)$

$= 1.25\ s^{-1}$

$= 1.25\ Hz$

T (دوری وقت) $= 1/(1.25\ s^{-1})$

$= 0.8\ s$

14.2.2 نقل (Displacement)

حصہ 4.2 میں ہم نے ایک ذرہ کے نقل کی تعریف اس طرح کی تھی کہ یہ اس کے مقام سمتیہ (Position Vector) میں تبدیلی ہے۔ اس باب میں ہم

شکل (a) 14.2: ایک اسپرنگ سے منسلک بلاک: اسپرنگ کا دوسرا سرا استوار دیوار میں جڑا ہے۔ بلاک بے رگڑ سطح پر حرکت کرتا ہے۔ بلاک کی حرکت، اس کے توازن مقام سے فاصلے یا نقل کی شکل میں بیان کی جاسکتی ہے۔

نقل (Displacement) زیادہ عمومی معنوں میں استعمال کریں گے۔ یہاں نقل سے مراد وقت کے ساتھ ہونے والی کسی بھی اس طبعی خاصیت میں تبدیلی ہے جو زیرِ غور ہو۔ مثال کے طور پر لوہے کی گیند کی سطح پر مستقیم حرکت کی صورت میں، شروعاتی نقطہ سے فاصلہ بہ طور وقت کے تفاعل (Function)، اس مقام کا نقل ہے۔ مبدا کا انتخاب سہولت کے مطابق کیا جاتا ہے۔ ایک اسپرنگ سے منسلک ایک گٹکا لیجیے۔ اسپرینگ کا دوسرا سرا استوار دیوار میں جڑا ہوا ہے۔ [دیکھیے شکل (a) 14.2]۔ عام طور پر ایک جسم کے نقل کو اس کے مقامِ توازن سے ناپنے میں سہولت رہتی ہے۔ ایک اہتزاز کرتے ہوئے سادہ پنڈولم کے لیے، انتصاب سے زاویہ بہ طور وقت تفاعل، کو نقل متغیرہ (Displacement Variable) لیا جاسکتا ہے دیکھیے شکل [(b)14.2]۔ اصطلاح 'نقل' صرف مقام کے تناظر میں ہی ہمیشہ استعمال نہیں ہوتی۔ کئی دوسری قسموں کے نقل متغیرات بھی ہوسکتے ہیں۔ ایک a.c. سرکٹ میں، ایک کپیسٹر (Capacitor) کے سروں کے بیچ لگائی گئی وولٹیج، جو وقت کے ساتھ تبدیل ہورہی ہے، بھی ایک نقل متغیرہ ہے۔ اسی طرح آواز لہر کی اشاعت میں وقت کے ساتھ ہونے والے دباؤ میں تبدیلیاں، ایک روشنی کی لہر میں بدلتے

شکل (b) 14.2: ایک اہتزاز کرتا ہوا سادہ پینڈولم، اس کی حرکت، انتصاب سے زاویائی نقل θ کی شکل میں بیان کی جاسکتی ہے۔

ہوئے برقی ومقناطیسی میدان بھی مختلف تناظر میں نقل کی مثالیں ہیں۔ نقل متغیرہ کی، مثبت قدر بھی ہوسکتی ہے اور منفی بھی۔ اہتزازات پر کیے جانے والے تجربات میں، نقل کی پیائش مختلف وقتوں کے لیے کی جاتی ہے۔

نقل کو وقت کے ریاضیاتی تفاعل کے ذریعے ظاہر کیا جاسکتا ہے۔ دَوری حرکت کی صورت میں، یہ تفاعل، وقت میں دوری ہوتا ہے۔ ایک سادہ ترین دوری تفاعل دیا جاتا ہے:

$$f(t) = A\cos\omega t \qquad (14.3a)$$

اگر اس تفاعل کا زاویہ حامل (Argument) ωt، 2π ریڈین کے کسی بھی صحیح عددِ ضعف (Integral multiple) سے بڑھا دیا جائے، تو تفاعل کی قدر یکساں رہتی ہے۔ اس لیے تفاعل $f(t)$، دَوری ہے اور اس کا دَور T دیا جاتا ہے:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad (14.3b)$$

اس لیے، تفاعل $f(t)$، دَور T کے ساتھ، دَوری ہے،

$$f(t) = f(t+T)$$

یہی نتیجہ حاصل ہوگا، اگر ہم ایک Sine تفاعل لیں: $f(t) = A\sin\omega t$ مزید، Sine اور Cosine تفاعلات کا ایک خطّی مجموعہ، جیسے

$$f(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t \qquad (14.3c)$$

بھی، یکساں دور T کے ساتھ، دَوری ہوگا۔

$$B = D\sin\phi \text{ اور } A = D\cos\phi$$

لیتے ہوئے، مساوات (14.3c) لکھی جا سکتی ہے،

$$f(t) = D \sin(\omega t + \phi) \qquad (14.3d)$$

یہاں D اور ϕ مستقلہ ہیں، جو دیے جاتے ہیں

$$D = \sqrt{A^2 + B^2} \ and\ \phi = \tan^{-1}\left(\frac{B}{A}\right)$$

دَوری Sine اور Cosine تفاعلات کی غیر معمولی اہمیت کی وجہ وہ شاندار نتیجہ ہے، جسے فرانسیسی ریاضی داں بپٹیسٹ جوزف فوریر (Beptiste Joseph Fourier) (1768-1830) نے ثابت کیا: **کسی بھی دَوری تفاعل کو مختلف دوری اوقات اور مناسب ضریبوں کے Sine اور Cosine تفاعلات کے انطباق کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے۔**

مثال 14.2: مندرجہ ذیل میں سے کون سے، وقت کے تفاعلات ظاہر کرتے ہیں: (a) دوری حرکت اور (b) غیر دوری حرکت؟ دوری حرکت کی ہر صورت میں دور بھی بتائیے۔ [ω کوئی مثبت مستقلہ ہے]۔

(i) $\sin \omega t + \cos \omega t$

(ii) $\sin \omega t + \cos 2\omega t + \sin 4\omega t$

(iii) $e^{-\omega t}$

(iv) $\log(\omega t)$

جواب

(i) $(\sin \omega t + \cos \omega t)$ ایک دوری تفاعل ہے۔ اسے ایسے بھی لکھا جا سکتا ہے: $\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4)$،

$$\sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4 + 2\pi)$$

$$= \sqrt{2}\sin[\omega(t + 2\pi/\omega) + \pi/4]$$

اس لیے تفاعل کا دوری وقت $2\pi/\omega$۔

(ii) یہ بھی دوری حرکت کی مثال ہے۔ آپ نوٹ کر سکتے ہیں کہ اس تفاعل کا ہر رکن، مختلف زاویائی تعدد کے دوری تفاعل کو ظاہر کرتا ہے۔ کیوں کہ دور وہ کم ترین وقفہ وقت ہے، جس کے بعد تفاعل اپنی قدر دہراتا ہے: $\sin \omega t$ کا دَور ہے: $T_0 = 2\pi/\omega$، $\cos 2\omega t$ کا دور ہے: $\pi/\omega = T_0/2$ اور $\sin 4\omega t$ کا دور ہے: $2\pi/4\omega = T_0/4$

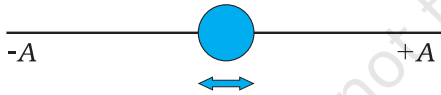
پہلے رکن کا دور باقی ارکان کے دوروں کا ضعف ہے۔ اس لیے کم ترین وقفہ وقت، جس کے بعد تینوں ارکانوں کا حاصل جمع اپنے آپ کو دہراتا ہے T_0 ہے اور اس طرح یہ حاصل جمع ایک دَوری تفاعل ہے، جس کا دور $2\pi/\omega$ ہے۔

(iii) یہ تفاعل $e^{-\omega t}$ دوری نہیں ہے۔ یہ بڑھتے ہوئے وقت کے ساتھ یک رنگی طرز (Monotonically) پر بڑھتا ہے اور: $t \to \infty, as\ t \to \infty$ اس لیے کبھی اپنے آپ کو دہراتا نہیں۔

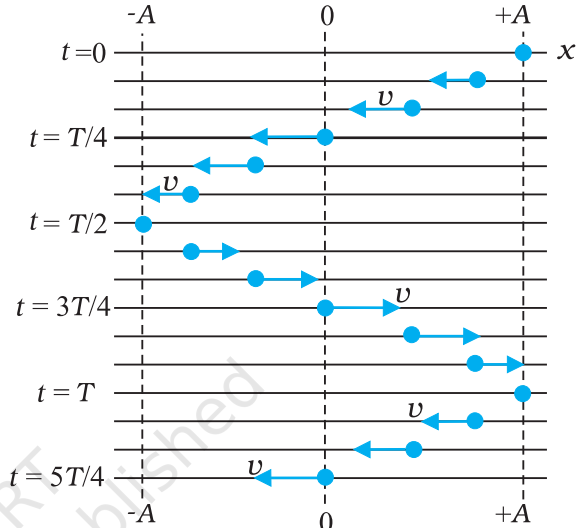
(iv) تفاعل $\log(\omega t)$، وقت کے ساتھ یک رنگی طرز پر بڑھتا ہے اور اس لیے اپنی قدر کو کبھی دہراتا نہیں اور اس لیے ایک غیر دوری تفاعل ہے۔ یہ بھی نوٹ کیا جا سکتا ہے کہ جیسے $t \to \infty$ $\log(\omega t)$ ∞ کو غیر متقارب (Diverge) ہوتا ہے۔ اس لیے یہ کسی طبعی نقل کو ظاہر نہیں کر سکتا۔

14.3 سادہ ہارمونی حرکت (SIMPLE HARMONIC MOTION)

ایک ذرہ ملاحظہ کریں، جو ایک X- محور کے مبدے کے گرد، +A اور -A کے درمیان، آگے پیچھے ارتعاش کر رہا ہے، جیسا کہ شکل 14.3 میں دکھایا گیا ہے۔ ان دونوں منتہائی مقامات (Extreme Positions) کے درمیان، ذرہ

-A +A

شکل 14.3: ایک ذرہ جو **X**- محور کے مبدے کے گرد، حدود **+A** اور **-A** کے درمیان، آگے پیچھے ارتعاش کررہا ہے۔

اس طرح حرکت کرتا ہے کہ جب وہ مبدے پر ہوتا ہے تو اس کی چال از حد (Maximum) ہوتی ہے اور جب وہ $+A$ پر ہوتا ہے تو چال صفر ہوتی ہے۔ وقت t کو ہم تب صفر منتخب کرتے ہیں، جب ذرہ $+A$ پر ہے اور یہ ذرہ $+A$ پر $t = T$ پر واپس آ جاتا ہے۔ اس حصہ میں ہم یہ حرکت بیان کریں گے۔ بعد میں ہم یہ سیکھیں گے کہ اسے کیسے حاصل کیا جا سکتا ہے اس ذرہ کی حرکت کا مطالعہ کرنے کے لیے ہم وقت کے تفاعل کے بہ طور اس کے مقامات نوٹ کرتے ہیں۔ اس کے لیے ہم ایک متعین وقفہ کے بعد اس کا فوری فوٹو

کھینچتے ہیں۔ ایسے فوری فوٹوؤں (Snapshots) کا ایک سیٹ شکل 14.4 میں دکھایا گیا ہے۔ مبدے کے لحاظ سے ذرے کا مقام، کسی بھی لمحہ وقت پر اس کا نقل دیتا ہے۔ ایسی حرکت کے لیے، ایک منتخب مبدے سے، ذرہ کا نقل x(t) وقت کے ساتھ اس طور پر تبدیل ہوتا پایا گیا ہے:

شکل 14.4 : فوری فوٹوؤں کا ایک سلسلہ (مساوی وقفہ وقت پر لیے گئے) جو ایک ذرہ کا مقام بتاتا ہے، جب کہ ذرہ x-محور پر مبدے کے گرد، حدود A+ اور A- کے بیچ ادھر اُدھر (آگے – پیچھے) ارتعاش کرتا ہے۔ سمتی تیروں کی لمبائیوں کو اس طور پر پیمانہ بند کیا گیا ہے کہ ان سے ذرہ کی چال کی نشاندھی ہوتی ہے۔ ذرے کی چال ازحد ہے، جب وہ مبدے پر ہے اور صفر ہے جب وہ A+ پر ہے۔ جب ذرہ A+ پر ہو تو وقت t کو اگر صفر منتخب کیا جائے، تب ذرہ t =T پر واپس A+ پر لوٹتا ہے، جہاں T حرکت کا دور ہے۔ اسے مساوات (14.4) کے ذریعے ظاہر کیا جاسکتا ہے (ϕ =0 رکھنے میں)

شکل 14.5 : مساوات (14.4) سے ظاہر کی جانے والی حرکت کے لیے x کا بہ طور تفاعل وقت گراف

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi) \qquad (14.4)$$

جس میں A, ω اور ϕ مستقلے ہیں۔

شکل 14.6 : مساوات (14.4) میں شامل مقداروں کا ایک حوالہ

مساوات (14.4) سے ظاہر کی گئی حرکت، سادہ ہارمونی حرکت (SHM) (Simple Harmonic Motion) کہلاتی ہے۔ ایک اصطلاح، جس کا مطلب ہے کہ دوری حرکت، وقت کا ایک سائن خم نما (Sinusoidla) تفاعل ہے۔ مساوات (14.4)، جس میں سائن خم نما تفاعل ایک کوسائن تفاعل ہے، کا گراف شکل (14.5) میں دکھایا گیا ہے۔ وہ مقداریں جو گراف کی

شکل 14.7 (a) : مساوات (14.4) سے حاصل ہوئے ($\phi = 0$ رکھنے پر) نقل کا بہ طور تفاعل وقت گراف: منحنی 1 اور منحنی 2 دو مختلف سعتوں A اور B کے لیے ہیں۔

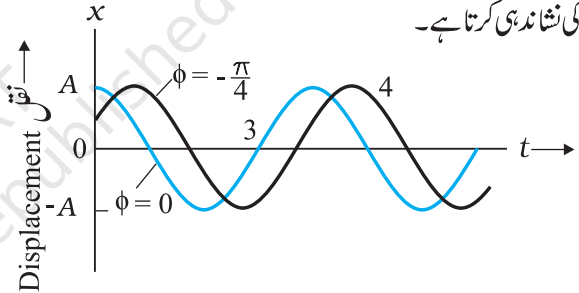
شکل طے کرتی ہیں، شکل 14.6 میں، اپنے ناموں کے ساتھ، دکھائی گئی ہیں۔

اب ہم ان مقداروں کی تعریف کرتے ہیں۔

مقدار A، حرکت کی سعت (Amplitude) کہلاتی ہے۔ یہ ایک مثبت مستقلہ ہے جو کسی بھی سمت میں ذرے کے ازحد نقل (Maximum Displacement) کی عددی قدر ظاہر کرتا ہے۔ مساوات (14.4) میں دیا گیا کوسائن تفاعل، حدود 1+ کے درمیان تبدیل ہوتا ہے، اس لیے نقل x (t)، حدود A + کے درمیان تبدیل ہوتا ہے۔ شکل (a) 14.7 میں منحنی 1 اور 2، دو مختلف سعتوں

A اور B کے لیے، مساوات (14.4) کے گراف ہیں۔ ان منحنی 1 اور منحنی 2 کے درمیان فرق سعت کی اہمیت کی وضاحت کرتا ہے۔

مساوات (14.4) میں وقت کے ساتھ تبدیلی ہونے والی مقدار، $(\omega t + \phi)$، حرکت کا فیز (Phase) کہلاتی ہے۔ یہ ایک دیے ہوئے وقت پر، حرکت کی حالت کو بیان کرتی ہے۔ مستقلہ ϕ فیز مستقلہ (Phase Constant) یا فیز زاویہ (Phase Angle) کہلاتا ہے۔ ϕ کی قدر، t=0 پر ذرے کی نقل اور رفتار کی قدر کے تابع ہے۔ اس کو شکل (b) 14.7 کی مدد سے بہتر طور پر سمجھا جاسکتا ہے۔ اس شکل میں، منحنی 3 اور منحنی 4 ، فیز مستقلہ ϕ کی دو قدروں کے لیے، مساوات (14.4) کا گراف ظاہر کرتے ہیں۔

یہ دیکھا جاسکتا ہے کہ فیز مستقلہ آغازی شرائط (Initial Conditions) کی نشاندہی کرتا ہے۔

شکل (b) 14.7 : مساوات **(14.4)** سے حاصل ہوا ایک گراف۔ منحنی **3** اور منحنی **4** ، حسب ترتیب $\phi = 0$ اور $\phi = -\pi/4$ کے لیے ہیں دونوں گرافوں میں سعت **A** یکساں ہے۔

مستقلہ ω ، جو حرکت کا زاویائی تعدد (Angular Frequency) کہلاتا ہے، دور T سے ایک رشتہ رکھتا ہے۔ ان کا رشتہ حاصل کرنے کے لیے:

مساوات (14.4) میں $\phi = 0$ رکھتے ہیں،

$$x(t) = A \cos \omega t \qquad (14.5)$$

اب کیوں کہ حرکت دوری ہے اور دور T ہے، نقل $x(t)$ کو حرکت کے ایک دور کے بعد اپنی آغازی قدر پر واپس لوٹنا ضروری ہے۔ یعنی کہ $x(t)$ کو $x(t+t)$ کے مساوی ہونا لازمی ہے (ہر t کی قدر کے لیے)۔ اس شرط کو (14.5) میں استعمال کرنے پر۔

$$A \cos \omega t = A \cos \omega(t + T) \qquad (14.6)$$

کیوں کہ کوسائن تفاعل اپنے آپ کو پہلی مرتبہ تب دہراتا ہے جب اس کے زاویہ حامل (Argument) [فیز Phase] میں 2π کا اضافہ ہوتا ہے۔ مساوات (14.6) سے

$$\omega(t + T) = \omega t + 2\pi$$

یا

$$\omega T = 2\pi$$

اس لیے زاویائی تعدد ہے

$$\omega = 2\pi / T \qquad (14.7)$$

زاویائی تعدد کی S1 اکائی ریڈین فی سیکنڈ ہے۔ دور T کی اہمیت واضح کرنے کے لیے، شکل 14.8 میں، دو مختلف دوروں کے لیے سائن خم نما تفاعل کے گراف دکھائے گئے ہیں۔

شکل 14.8 : دو مختلف دوروں کے لیے مساوات **(14.4)** کے گراف $(\phi = 0)$۔

اس گراف میں منحنی a کے ذریعے ظاہر کیے گئے SHM کا دور T ہے اور منحنی b کے ذریعے ظاہر کیے گئے SHM کا دور: $T' = T/2$ ہے۔

ہم سادہ ہارمونی حرکت سے متعارف تو ہو ہی چکے ہیں۔ اگلے حصے میں ہم سادہ ہارمونی حرکت کی کچھ سادہ ترین مثالوں سے بحث کریں گے۔ یہ دکھایا جائے گا کہ ایک دائرہ کے قطر پر، یکساں دائری حرکت کا ظل (Projection)، سادہ ہارمونی حرکت کرتا ہے۔

مثال 14.3 : مندرجہ ذیل میں سے وقت کے کون سے تفاعلات ظاہر کرتے ہیں (a) سادہ ہارمونی حرکت (b) دوری لیکن سادہ ہارمونی حرکت نہیں۔ ہر ایک کے لیے دور بھی معلوم کیجیے۔

$\sin \omega t - \cos \omega t$ (1)

$\sin^2 \omega t$ (2)

جواب : (a)

$$\sin \omega t - \cos \omega t$$
$$= \sin \omega t - \sin (\pi/2 - \omega t)$$
$$= 2 \cos (\pi/4) \sin (\omega t - \pi/4)$$
$$= \sqrt{2} \sin (\omega t - \pi/4)$$

یہ تفاعل ایک سادہ ہارمونی حرکت کو ظاہر کرتا ہے، جس کا دور : $T = 2\pi/\omega$ اورزاویہ حامل $(-\pi/4)$ یا $(7\pi/4)$ ہے

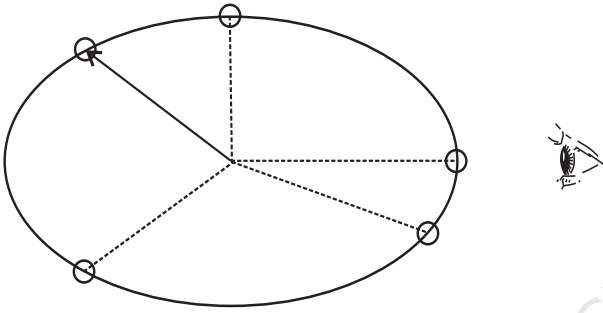
(b)

$$\sin^2 \omega t$$
$$= ½ - ½ \cos 2 \omega t$$

یہ تفاعل بھی دوری ہے، جس کا دور: $T = \pi/\omega$ ہے۔ یہ بھی ایک ہارمونی حرکت کو ظاہر کرتا ہے، اس طرح کہ نقطہ توازن صفر کی جگہ ½ ہے۔ ▶

14.4 : سادہ ہارمونی حرکت اور یکساں دائری حرکت (SIMPLE HARMONIC MOTION AND UNIFORM CIRCULAR MOTION)

1610 میں گلیلیو نے سیارہ مشتری (Jupiter) کے چار چاند دریافت کیے۔ انھیں ہر چاند، سیارہ کی مناسبت سے، آگے پیچھے ایک سادہ ہارمونی حرکت کرتا ہوا نظر آیا، جہاں سیارہ کی قرص (Disc) حرکت کا وسطی نقطہ (Middle Point) تھی۔ ان کے اپنے ہاتھوں سے لکھے ہوئے ان مشاہدات کے ریکارڈ آج بھی موجود ہیں۔ ان کے آنکڑوں پر مبنی، مشتری کی مناسبت سے کیلسٹو (Callisto) نام کے چاند کے مقام شکل 14.9 میں دکھائے گئے ہیں۔ اس شکل میں دائرے گلیلیو کے آنکڑوں کے نقاط ظاہر کرتے ہیں اور کھینچا گیا منحنی ان آنکڑوں پر سب سے بہتر بیٹھنے والا منحنی ہے۔ یہ منحنی مساوات (14.4) کی تعمیل کرتا ہے، جو کہ SHM کے لیے نقل تفاعل ہے۔ اس سے تقریباً 16.8 دن کا دوری وقت حاصل ہوتا ہے۔

اب یہ بخوبی معلوم ہے کہ کیلسٹو بنیادی طور پر ایک مستقلہ چال سے مشتری کے گرد، ایک تقریباً دائری مدار میں حرکت کرتا ہے۔ اس کی حقیقی حرکت، یکساں دائری حرکت ہے۔ جو گلیلیو نے دیکھا اور جو ایک اچھی دوربین کی مدد سے ہم بھی دیکھ سکتے ہیں، اس یکساں دائری حرکت کا، حرکت کے مستوی میں ایک خط پر، ظل (Projection) ہے۔ اسے ایک سادہ تجربہ کے ذریعے بہ آسانی سمجھا جاسکتا ہے۔ ایک ڈوری کے ایک سرے پر ایک گیند باندھ دیجیے

شکل 14.9 : کسی کنارے سے دیکھنے پر کسی گیند کی دائری حرکت SHM ہے۔

اور اسے ایک متعین نقطہ کے گرد، مستقلہ زاویائی چال کے ساتھ ایک افقی مستوی میں حرکت کرائیے۔ تو گیند افقی مستوی میں ایک یکساں دائری حرکت کرے گی۔ گیند کو سامنے سے یا دائیں۔ بائیں سے دیکھیے، اور اپنی توجہ حرکت کے مستوی میں رکھیے۔ آپ کو گیند ایک افقی خط پر آگے پیچھے حرکت کرتی نظر آئے گی، اور گردش کا نقطہ اس کا وسطی نقطہ ہوگا۔ اس کے متبادل عمل کے طور پر آپ ایسی دیوار پر گیند کا سایہ بھی دیکھ سکتے ہیں جو دائرہ کے مستوی کا عمود ہو۔ اس عمل میں ہم دیکھ رہے ہیں، ایک دائرہ، جو دیکھنے کی سمت پر عمود ہے، کے قطر پر گیند کی حرکت۔ یہ تجربہ گلیلیو کے مشاہدات کی ایک تمثیل پیش کرتا ہے۔

شکل 14.10میں ایک حوالہ ذرہ P (Reference particle) کی حرکت دکھائی گئی ہے، جو زاویائی رفتار (مستقلہ) ω سے ایک حوالہ دائرہ (Reference Circle)میں یکساں دائری حرکت کر رہا ہے۔ دائرہ کا نصف قطر A، ذرے کے مقام سمیتہ کی عددی قدر کے مساوی ہے۔ کسی بھی وقت t پر، ذرے کا زاویائی مقام (Angular Position)، $\omega t + \phi$ ہے،

شکل 14.10 : ایک حوالہ ذرہ P کی حرکت جو نصف قطر A کے حوالہ دائرہ میں ، مستقلہ زاویائی رفتار ω سے یکساں دائری حرکت کررہا ہے۔

جہاں ϕ، $t = 0$ پر زاویائی مقام ہے۔ ذرہ P کا x-محور پر سایہ (ظل Projection) ایک نقطہ P' ہے، جسے ہم ایک دوسرا ذرہ تصور کرسکتے ہیں۔ x- محور پر، ذرہ P کے مقام سمتیہ کا ظل P' کا مقام x (t) دیتا ہے۔ اس لیے:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \phi)$$

جو مساوات (14.4) کے مساوی ہے۔ یہ ظاہر کرتا ہے کہ اگر حوالہ ذرہ P ایک یکساں دائری حرکت کرتا ہے تو اس کا ظلّی ذرہ (Projection Partical) ایک دائرہ کے قطر پر سادہ ہارمونی حرکت کرتا ہے۔

گلیلیو کے مشاہدات اور مندرجہ بالا بحث سے ہم یہ اخذ کر سکتے ہیں کہ دائری حرکت ایک کنارے سے دیکھے جانے پر سادہ ہارمونی حرکت ہے۔ زیادہ رسمی زبان میں، ہم کہہ سکتے ہیں کہ: سادہ ہارمونی حرکت، یکساں دائری حرکت کا، اس دائرہ کے قطر پر، جس میں دائری حرکت ہو رہی ہے، ظل (Projection) ہے۔

مثال 14.4: شکل 14.11 میں دو دائری حرکتیں دکھائی گئی ہیں۔ دائرہ کے نصف قطر، گردش کے دوری وقت، آغازی مقام اور گردش کی سمت کی نشاندہی شکل میں کردی گئی ہے۔ ہر صورت میں، گردش کر رہے ذرہ P کے نصف قطر سمتیہ کے x- ظل کی سادہ ہارمونی حرکت حاصل کیجیے۔

جواب : (a) $t = 0$ پر، OP، x- محور کی مثبت سمت کے ساتھ زاویہ بناتا ہے: $45^\circ = \pi/4$، t وقت کے بعد یہ زاویہ $\frac{2\pi}{T}t$ طے کرتا ہے (گھڑی کی سوئیوں کی مخالف سمت میں) اور x- محور کے ساتھ زاویہ $\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}$ بناتا ہے۔

وقت t پر، OP کا x- محور پر ظل دیا جاتا ہے

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

T = 45 کے لئے

$$x(t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{4}t + \frac{\pi}{4}\right)$$

جو ایک SHM ہے، جس کی سعت A، دور 4s اور آغازی فیز $=\frac{\pi}{4}$*

* زاویہ کی قدرتی اکائی ریڈین ہے۔ جس کی تعریف ہے قوس کی نصف قطر سے نسبت۔ زاویہ ایک غیر ابعادی مقدار ہے۔ اس لیے ہمیشہ ضروری نہیں ہوتا کہ جب ہم π ، اس کے ضعف یا تحت ضعف استعمال کریں تو اکائی "ریڈین" لکھیں۔ ریڈین اور ڈگری میں آپسی تبادلہ میٹر اور سینٹی میٹر یا میل جیسا نہیں ہے۔ اگر ایک مثلثاتی تفاعل (Trignometri Function) کا زاویہ حامل بغیر اکائیوں کے لکھا جاتا ہے تو یہ سمجھ لیا جاتا ہے کہ اکائی ریڈین ہے۔ دوسری طرف اگر ڈگری کو زاویہ کی اکائی کے طور پر استعمال کرنا ہے تو اسے واضح طور پر دکھانا ضروری ہے۔ مثلاً $\sin(15^\circ)$ کا مطلب ہے 15 ڈگری کا سائن، لیکن $\sin(15)$ کا مطلب ہے 15 ریڈین کا سائن۔ اب ہم اکثر rad (ریڈین) بطور اکائی نہیں لکھیں گے اور یہ سمجھ لینا چاہیے کہ جب بھی زاویہ کی صرف عددی قدر دی گئی ہو، بغیر اکائی کے ، تو زاویہ ریڈین میں ہے۔

ہے(b)اس صورت میں، t=0 پر، OP، x-محور کے ساتھ زاویہ: $90^0 = \frac{\pi}{2}$ بناتا ہے۔ t-وقت کے بعد یہ زاویہ $\frac{2\pi}{T}t$، (گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں) طے کرتا ہے اور x-محور کے ساتھ زاویہ $\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t\right)$ بناتا ہے۔ وقت t پر، x-محور پر OP کا ظل دیا جاتا ہے

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{T}t\right)$$

$$= B\sin\frac{2\pi}{T}t$$

T=30s کے لئے

$$x(t) = B\sin\left(\frac{\pi}{15}t\right)$$

اسے لکھتے ہیں:

$$x(t) = B\cos\left(\frac{\pi}{15}t - \frac{\pi}{2}\right)$$

مساوات (14.4) سے مقابلہ کرنے پر، یہ ظاہر کرتا ہے ایک SHM، جس کی سعت B، دور 30s اور آغازی فیز $-\frac{\pi}{2}$ ہے۔ ◀

14.5 سادہ ہارمونی حرکت میں رفتار اور اسراع (VELOCITY AND ACCELERATION IN SIMPLE HARMONIC MOTION)

یہ آسانی سے دیکھا جاسکتا ہے کہ رفتار **v** کی عددی قدر، جس سے حوالہ ذرہ P (شکل 14.10) ایک دائرہ میں حرکت کررہا ہے، اس میں اور زاویائی رفتار ω میں ایک رشتہ ہے:

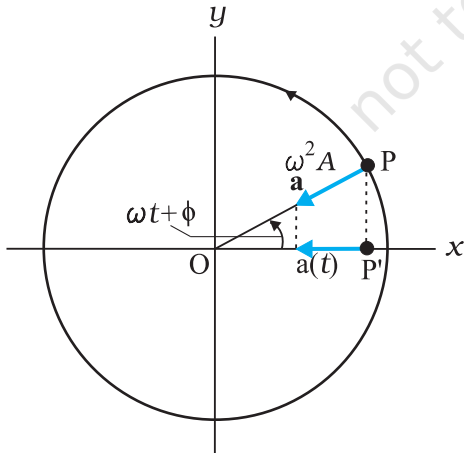
$$\upsilon = \omega A \qquad (14.8)$$

جہاں A اس دائرہ کا نصف قطر ہے جو ذرہ P بناتا ہے۔ ظلّی ذرہ کے رفتار سمتیہ V کی عددی قدر ωA ہے، اس کا x-محور پر ظل، کسی بھی وقت t پر، جیسا شکل (14.12) میں دکھایا گیا ہے،

$$\upsilon(t) = -\omega A\sin(\omega t + \phi) \qquad (14.9)$$

شکل 14.11 : ذرہ P' کی رفتار **v (t)**، حوالہ ذرہ P کی رفتار **v** کا ظل ہے۔

منفی علامت اس لیے آتی ہے کیوں کہ P کے رفتار جز کی سمت بائیں طرف ہے، x کی منفی سمت میں۔ مساوات (14.9) ایک SHM کرتے ہوئے ذرہ (P کا ظل) کی ساعتی رفتار (Instantaneous velocity) کو ظاہر کرتی ہے۔ اس لیے، یہ ایک SHM کرتے ہوئے ذرے کی ساعتی رفتار کو ظاہر کرتی ہے۔ مساوات (14.9)، مساوات (14.4) کے وقت کے تفرق (Differentiation) کے ذریعے بھی حاصل کی جاتی ہے:

$$\upsilon(t) = \frac{d}{dt}x(t) \qquad (14.10)$$

شکل 14.12 : ذرہ کا اسراع **a** (t)، حوالہ ذرہ P' کے اسراع **a** کا ظل ہے۔

ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک ذرہ جو یکساں دائری حرکت کررہا ہو اس پر ایک نصف قطری اسراع (Radial Acceleraton) **a** کام کرتا ہے، جس کی

سمت مرکز کی طرف ہوتی ہے۔شکل 14.13 میں،حوالہ ذرہ P کا، جو یکساں دائری حرکت کر رہا ہے، ایسا نصف قطری اسراع دکھایا گیا ہے۔ P کے نصف قطری اسراع کی عددی قدر $\omega^2 A$ ہے۔ x– محور پر، کسی بھی وقت t پر، اس کا ظل ہے:

$$a\ (t)\ = -\omega^2 A \cos\ (\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 x\ (t) \qquad (14.11)$$

جو ذرہ P' (ذرہ P کا ظل) کا اسراع ہے۔مساوات (14.11)، اس لیے، ذرہ P' کے، جو SHM کر رہا ہے، ساعتی اسراع (Instantaneous Acceleration) کو ظاہر کرتی ہے۔ اس لئے، مساوات (14.11) SHM کرتے ہوئے ایک ذرے کے اسراع کو ظاہر کرتی ہے۔یہ SHM کے لیے ایک اہم نتیجہ ہے۔یہ ظاہر کرتا ہے کہ SHM میں، اسراع، نقل کے متناسب ہوتا ہے اور اس کی سمت ہمیشہ وسطی مقام (Mean Position) کی جانب ہوتی ہے۔مساوات (14.11)، مساوات (14.9) کا وقت کی مناسبت سے تفرق کر کے بھی حاصل کی جاسکتی ہے:

$$a(t) = \frac{d}{dt}\ v(t) \qquad (14.12)$$

ایک سادہ ہارمونی حرکت کرتے ہوئے ذرہ کے نقل، اس کی رفتار اور اس کے اسراع کے مابین رشتہ شکل (14.14) میں دیکھا جاسکتا ہے۔اس شکل میں، شکل (a) مساوات (14.14) کا گراف ہے، $\phi = 0$ کے ساتھ اور (b) مساوات (14.9) کو دکھاتی ہے، یہ بھی $\phi = 0$ کے ساتھ۔مساوات (14.4) میں سعت A کی طرح، مساوات (14.9) میں مثبت مقدار ωA، رفتار سعت (Velocity Amplitude) v_m کہلاتی ہے۔شکل (14.14 (b)) میں دیکھا جاسکتا ہے کہ اہتزاز کرتے ہوئے ذرے کی رفتار، حدود: $\pm\ v_m\ =\ \pm\ \omega A$ کے درمیان تبدیل ہوتی ہے۔نوٹ کریں کہ v(t) کا منحنی، x(t) کے منحنی سے، ایک چوتھائی دور، بائیں طرف ہٹا ہوا ہے۔اس لیے ذرہ کی رفتار، نقل سے $\pi / 2$ کے فیز زاویہ سے پس قدم (Lags) ہے۔جب نقل کی عددی قدر زیادہ سے زیادہ (Maximum) ہے تو رفتار کی عددی قدر کم ترین (Minimum) ہے۔جب نقل کی عددی

شکل 14.13 : سادہ ہارمونی حرکت کرتے ہوئے ذرے کے نقل، رفتار اور اسراع **(a)** ایک **SHM** کرتے ہوئے ذرہ کا نقل **x(t)**، جب کہ فیز زاویہ ϕ، صفر کے مساوی ہے۔ **(b)** اس ذرہ کی رفتار **v(t)** **(c)** اس ذرہ کا اسراع **a(t)**

قدر کم ترین ہے تو رفتار کی عددی قدر زیادہ سے زیادہ ہے۔شکل (14.14(c))، ذرہ کے اسراع a(t) کے تغیر کو دکھاتی ہے۔یہ نظر آتا ہے کہ جب نقل اپنی سب سے زیادہ مثبت قدر پر ہوتا ہے تو اسراع اپنی سب سے زیادہ منفی قدر پر ہوتا ہے، اور اس کے برخلاف بھی۔جب نقل صفر ہوتا ہے، تو اسراع بھی صفر ہوتا ہے۔

> **مثال 14.5** ایک جسم جو مندرجہ ذیل مساوات کے مطابق SHM کر رہا ہے (S1 اکائی میں):
>
> $$x = (5) \cos\ [2\pi \text{ rad s}^{-1}\ t + \pi/4]$$
>
> t=1.5s پر اس کے لیے (a) نقل (b) چال اور (c) اسراع کا حساب لگائیے۔

جواب: $(\omega) = 2\pi\ s^{-1}$ جسم کا زاویائی تعدد اور (T)=1s دوری وقت

$t = 1.5$ s پر

(a) $\quad$ نقل $= (5.0 \text{ m}) \cos\ [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \pi/4]$

$$= (5.0 \text{ m}) \cos [(3\pi + \pi/4)]$$
$$= -5.0 \times 0.707 \text{ m}$$
$$= -3.535 \text{ m}$$

(b) مساوات (14.9) استعمال کرتے ہوئے، جسم کی رفتار ہے:

$$\text{رفتار} = -(5.0 \text{ m})(2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(2\pi \text{ s}^{-1}) \times 1.5 \text{ s} + \pi/4]$$
$$= -(5.0 \text{ m})(2\pi \text{ s}^{-1}) \sin [(3\pi + \pi/4)]$$
$$= 10\pi \times 0.707 \text{ m s}^{-1}$$
$$= 22 \text{ m s}^{-1}$$

(c) مساوات (14.0) استعمال کرتے ہوئے، جسم کا اسراع ہے:

$$\text{اسراع} = -(2\pi \text{ s}^{-1})^2 \times \text{نقل}$$
$$= -(2\pi \text{ s}^{-1})^2 \times (-3.535 \text{ m})$$
$$= 140 \text{ m s}^{-2}$$

14.6 سادہ ہارمونی حرکت کے لیے قوت قانون

(FORCE LAW FOR SIMPLE HARMONIC MOTION)

حصہ 14.3 میں ہم نے سادہ ہارمونی حرکت بیان کی۔ اب ہم یہ بحث کرتے ہیں کہ اسے کیسے پیدا کیا جاسکتا ہے۔ نیوٹن کا حرکت کا دوسرا قانون، ایک نظام پر لگ رہی قوت، اور اس میں پیدا ہوئے اسراع کے مابین رشتہ نیا ہے۔ اس لیے، اگر ہمیں یہ معلوم ہو کہ ایک ذرہ کا اسراع، وقت کے ساتھ، کیسے تبدیل ہو رہا ہے، تو اس قانون کو استعمال کرکے ہم اس قوت کے بارے میں جان سکتے ہیں جو اس ذرہ میں اتنا اسراع پیدا کرنے کے لیے اس ذرہ پر لگنا ضروری ہے۔ اگر ہم نیوٹن کے حرکت کے دوسرے قانون اور مساوات (14.11) کو ملائیں، تو ہم پاتے ہیں کہ سادہ ہارمونی حرکت کے لیے:

$$F(t) = m a$$
$$\text{یا} = -m \omega^2 x(t) \qquad (14.13)$$
$$F(t) = -k\, x(t)$$

جہاں

$$k = m\omega^2 \qquad (14.14a)$$
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (14.14b)$$

مساوات (14.13)، ذرے پر لگ رہی قوت دیتی ہے۔ یہ نقل کے متناسب ہے اور اس کی سمت نقل کے مخالف ہے۔ اس لیے یہ ایک بحالی قوت (Restoring Force) ہے۔ نوٹ کریں کہ یہ یکساں دائری حرکت میں لگ رہی مرکز جو قوت (Centripetal Force) کی طرح نہیں ہے جس کی عددی قدر یکساں (مستقلہ) رہتی ہے، بلکہ SHM کے لیے بحالی قوت، وقت کے تابع ہے۔ مساوات (14.13) کے ذریعے بیان کیا گیا قوت کا قانون، سادہ ہارمونی حرکت کی متبادل تعریف بھی سمجھا جاسکتا ہے، اس کا بیان ہے: سادہ ہارمونی حرکت، وہ حرکت ہے، جو اس ذرہ کے ذریعے کی جاتی ہے جس پر ایسی قوت لگ رہی ہو جو ذرہ کے نقل کے متناسب ہو اور جس کی سمت وسط مقام کی جانب ہو۔

کیونکہ قوت F، x کے متناسب ہے، x کی کسی اور قوت (Power) کے نہیں، ایسے نظام کو خطی ہارمونی اہتزاز کار (Linear Harmonic Oscillator) بھی کہا جاتا ہے۔ ایسے نظام جن میں بحالی قوت، x کا ایک غیر خطی تفاعل ہوتی ہے، غیر خطی ہارمونی اہتزاز کار یا غیر ہارمونی (Anharmonic) اہتزاز کار کہلاتے ہیں۔

مثال 14.6: اسپرنگ مستقلہ k کے دو متماثل اسپرنگ ایک بلاک (کمیت m) سے اور جڑے ہوئے سہاروں سے منسلک ہیں، جیسا کہ شکل 14.16 میں دکھایا گیا ہے۔ دکھایئے کہ جب کمیت کو مقامِ توازن سے اِدھر اُدھر، کسی بھی سمت میں، منتقل کیا جاتا ہے، تو یہ سادہ ہارمونی حرکت کرتا ہے۔ اہتزاز کا دور بھی معلوم کیجیے۔

شکل 14.14

جواب: فرض کیجیے کمیت کو مقام توازن کی دائیں سمت میں ایک چھوٹے فاصلے Δx سے منتقل کیا گیا ہے، جیسا کہ شکل 14.16 میں دکھایا گیا ہے۔ اس حالت میں بائیں طرف کا اسپرنگ کھینچ جاتا ہے، x لمبائی سے اور دائیں طرف کا اسپرنگ، یکساں لمبائی سے، دب جاتا ہے۔

شکل 14.15

اس لیے کمیت پر کام کر رہی قوتیں ہیں: [بائیں طرف کے اسپرنگ کے ذریعے لگائی گئی قوت جو کمیت کو وسط مقام کی طرف کھینچنے کی کوشش کر رہی ہے]

$$F_1 = -k x$$

وسط مقام کی طرف کھینچنے کی کوشش کر رہی ہے۔

(دائیں طرف کے اسپرنگ کے ذریعے لگائی گئی قوت، جو کمیت کو وسط مقام کی طرف ڈھکیلنے کی کوشش کر رہی ہے): اس لیے کمیت پر لگ رہی، کل قوت F ہے: $F_1 = -k x$

اس لیے کمیت پر لگ رہی قوت، نقل کے متناسب ہے اور اس کی سمت، وسط مقام کی جانب ہے، اس لیے کمیت کے ذریعے کی جا رہی حرکت، سادہ ہارمونی حرکت ہے۔

اہتزازات کا دَوری وقت ہے:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$$

▶

14.7 : سادہ ہارمونی حرکت میں توانائی (ENERGY IN SIMPLE HARMONIC MOTION)

ایک سادہ ہارمونی حرکت کرتے ہوئے ذرے کی حرکی توانائی اور توانائی بالقوۃ دونوں، حدود صفر اور ازحد کے درمیان بدلتی رہتی ہیں۔

حصہ 14.5 میں ہم دیکھ چکے ہیں کہ SHM کرتے ہوئے ایک ذرے کی رفتار، وقت کا ایک دَوری تفاعل ہے۔ یہ نقل کے انتہائی مقامات (Extreme Positions) پر صفر ہوتی ہے۔ اس لیے، ایسے ذرہ کی حرکی توانائی (K)، جس کی تعریف کی جاتی ہے:

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

$$= \frac{1}{2}m\,\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \sin^2(\omega t + \phi) \qquad (14.15)$$

بھی وقت کا ایک دَوری تفاعل ہے، جو نقل ازحد ہونے پر صفر ہوتا ہے اور جب ذرہ وسط مقام پر ہوتا ہے تو ازحد ہوتا ہے۔ نوٹ کریں کیوں کہ K (حرکی توانائی) میں v کی علامت سے کوئی فرق نہیں پڑتا، K کا دَور $T/2$ ہے۔

ایک سادہ ہارمونی حرکت ہوئے ذرہ کی توانائی بالقوۃ کیا ہوگی؟ باب 6 میں ہم سیکھ چکے ہیں کہ توانائی بالقوہ کا تصور صرف برقراری قوتوں کے لیے ہی ممکن ہے۔ اسپرنگ قوت: $F=kx$ ایک برقراری قوت (Conservative Force) ہے، جس سے منسلک توانائی بالقوۃ ہے:

$$U = \frac{1}{2}k\,x^2 \qquad (14.16)$$

اس لیے سادہ ہارمونی حرکت ہوئے ایک ذرے کی توانائی بالقوۃ ہے

$$U(x) = \frac{1}{2}k\,x^2$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \cos^2(\omega t + \phi) \qquad (14.17)$$

اس لیے سادہ ہارمونی حرکت کرتے ہوئے ایک ذرہ کی توانائی بالقوۃ بھی دَوری ہے، جس کا دور $T/2$ ہے اور یہ توانائی وسطی مقام پر صفر اور انتہائی نقل پر ازحد ہوتی ہے۔

مساوات (14.15) اور مساوات (14.17) سے یہ اخذ کیا جا سکتا ہے کہ نظام کی کل توانائی 'E' ہے:

$$E = U + K$$

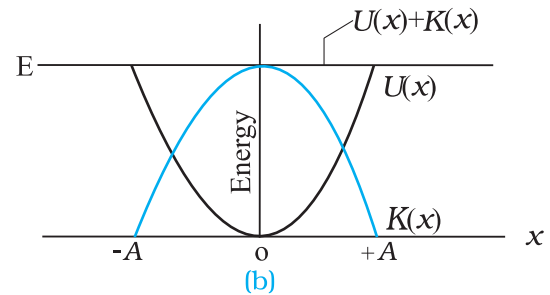
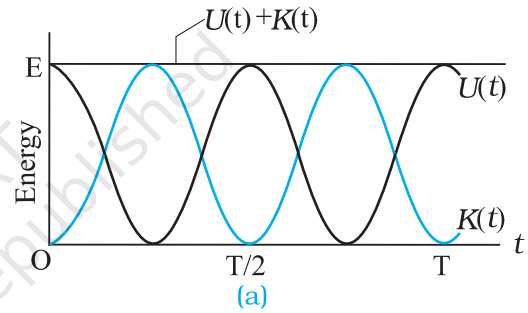
$$= \frac{1}{2}k\,A^2 \cos^2(\omega t + \phi) + \frac{1}{2}k\,A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

$$= \frac{1}{2}k\,A^2\left[\cos^2(\omega t + \phi) + \sin^2(\omega t + \phi)\right]$$

مندرجہ بالا مربع قوسین(Square Brackets) میں دی ہوئی قدر اکائی ہے،اس لیے

$$E = \frac{1}{2} k A^2 \qquad (14.18)$$

ایک ہارمونی اہتزاز کار کی کل توانائی (میکانیکی)،اس لیے،وقت کے غیر تابع ہے،جیسا کہ برقراری قوتوں کے تحت ہونے والی کسی بھی حرکت کے لیے امید کی جاتی ہے۔ایک خطی سادہ ہارمونی اہتزاز کار کے لیے بالقوۃ اور حرکی توانائیوں کا وقت اور نقل پر انحصار شکل 14.17 میں دکھایا گیا ہے۔

یہ دیکھا گیا ہے کہ ایک خطی ہارمونی اہتزاز کار میں تمام توانائیاں مثبت ہوتی ہیں اور ہر دَور کے درمیان دو مرتبہ اپنی از حد قدر پر پہنچتی ہیں۔ $x = 0$

شکل 14.16 (a) ایک خطی ہارمونی اہتزاز کار کے لیے توانائی بالقوۃ $U(t)$، حرکی توانائی k t اور کل توانائی $E(t)$ بہ طور تفاعل وقت۔ تمام توانائیاں مثبت ہیں اور توانائی بالقوۃ اور حرکی توانائی ، اہتزاز کار کے ہر دور میں دو مرتبہ اپنی از حد قدر حاصل کرتی ہیں۔(b) ایک خطی ہارمونی اہتزاز کار کے لیے توانائی بالقوۃ $U(t)$، حرکی توانائی $K(t)$ اور کل توانائی $E(t)$، بہ طور مقام x کے تفاعل اور سعت A کے ساتھ $x = 0$ کے لئے توانائی پوری حرکی ہے اور $x = \pm A$ کے لیے پوری بالقوۃ۔

کے لیے،توانائی ، پوری حرکی ہوتی ہے اور $x = \pm A$ کے لئے یہ پوری بالقوۃ ہوتی ہے۔

ان دونوں انتہائی مقامات کے درمیان،توانائی بالقوۃ،حرکی توانائی کے صفر ہونے پر، بڑھتی ہے۔ایک خطی ہارمونی اہتزاز کار کا یہ برتاؤ تجویز کرتا ہے کہ اس میں کچھ اس پر رنگیت کی خاصیت (اسپرنگ جیسی) پائی جاتی ہے اور کچھ جمود کی۔پہلی خاصیت اس کی توانائی بالقوۃ کو ذخیرہ کرتی ہے اور دوسری اس کی حرکی توانائی کو۔

> **مثال 14.7** ایک بلاک، جس کی کمیت 1kg ہے، ایک اسپرنگ سے منسلک کیا گیا ہے۔اسپرنگ کا اسپرنگ مستقلہ $50\ N\ m^{-1}$ ہے۔ $t=0$ پر بلاک کو ایک بے رگڑ سطح پر، اس کی حالتِ سکون $x=0$ سے فاصلہ $x=10cm$ تک کھینچا جاتا ہے۔جب اسپرنگ اپنے وسطی مقام سے 5cm دور ہے تو اس کی حرکی، بالقوۃ اور کل توانائیوں کا حساب لگایئے۔

جواب: بلاک SHM کر رہا ہے۔اس کا زاویائی تعدد،مساوات (14.14) b کے ذریعے،ہے،

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{50\ N\ m^{-1}}{1kg}}$$

$$= 7.07\ rad\ s^{-1}$$

کسی بھی وقت t پر نقل دیا جاتا ہے،

$$x(t) = 0.1 \cos (7.07t)$$

اس لیے،جب ذرہ،وسطی مقام سے 5 cm کی دوری پر ہے،تو

$$0.05 = 0.1 \cos (7.07t)$$

یا

اس لیے $\cos (7.07t) = 0.5$

$$\sin (7.07t) = \frac{\sqrt{3}}{2} = 0.866$$

تب، $x = 5\ cm$ پر بلاک کی رفتار،

$$v(t) = 0.1 \times 7.07 \times 0.866 \text{ m s}^{-1}$$
$$= 0.61 \text{ m s}^{-1}$$

اس لیے بلاک کی حرکی توانائی

$$K.E = \frac{1}{2} m v^2$$
$$= ½[1\text{kg} \times (0.6123 \text{ m s}^{-1})^2]$$
$$= 0.19 \text{ J}$$

بلاک کی توانائی بالقوۃ

$$P.E. = \frac{1}{2} k x^2$$
$$= ½(50 \text{ N m}^{-1} \times 0.05 \text{ m} \times 0.05 \text{ m})$$
$$= 0.0625 \text{ J}$$

$x = 5\text{cm}$ پر بلاک کی کل توانائی

$$= K.E. + P.E.$$
$$= 0.25 \text{ J}$$

ہم یہ بھی جانتے ہیں کہ ازحد نقل پر حرکی توانائی صفر ہوتی ہے اور نظام کی کل توانائی اس کی توانائی بالقوۃ کے مساوی ہوتی ہے۔ اس لیے نظام کی کل توانائی،

$$= ½(50 \text{ N m}^{-1} \times 0.1 \text{ m} \times 0.1 \text{ m})$$
$$= 0.25 \text{ J}$$

$x = 5$ cm پر دونوں توانائیوں کے حاصل جمع کے یکساں ہے۔ جو توانائی کی بقا کے اصول سے مطابقت رکھتا ہے۔ ▶

14.8 سادہ ہارمونی حرکت کرتے ہوئے کچھ نظام (SOME SYSTEMS EXECUTING SIMPLE HARMONIC MOTION)

مطلق خالص سادہ ہارمونی حرکت کی کوئی طبعی مثال نہیں پائی جاتی۔ عملی طور پر، ہم ایسے نظام پاتے ہیں جو مخصوص شرائط کے تحت، تقریباً (Approximately)، ہارمونی حرکت کر رہے ہوتے ہیں۔ اس سبق کے اگلے حصے میں ہم کچھ ایسے نظاموں کی حرکت سے بحث کریں گے۔

شکل 14.17 ایک خطی سادہ ہارمونی اہتزاز کار جو کمیت m کے ایک اس بلاک پر مشتمل ہے جو ایک اسپرنگ سے منسلک ہے۔ بلاک ایک بے رگڑ سطح پر حرکت کرتا ہے۔ ایک مرتبہ ایک طرف کھینچ کر چھوڑ دیے جانے پر یہ سادہ ہارمونی حرکت کرتا ہے۔

14.8.1 ایک اسپرنگ کی وجہ سے اہتزازات (Oscillations due to a spring)

سب سے سادی، قابلِ مشاہدہ، سادہ ہارمونی حرکت کی، مثال وہ چھوٹے اہتزازات ہیں جو ایک اسپرنگ سے منسلک کمیت m کا ایک بلاک کرتا ہے۔ یہ اسپرنگ ایک استوار دیوار میں جڑا ہوتا ہے، جیسا کہ شکل 14.18 میں دکھایا گیا ہے۔ اگر بلاک کو ایک طرف کھینچا جائے اور پھر چھوڑ دیا جائے تو یہ ایک وسطی مقام کے آگے۔ پیچھے (اِدھر اُدھر) حرکت کرتا ہے۔ فرض کیجیے، $x = 0$ بلاک کے مرکز کے مقام کی نشاندہی اس وقت کرتا ہے جب اسپرنگ حالت توازن میں ہے۔ $-A$ اور $+A$ سے نشان زد کیے گئے مقامات، وسطی مقام کے بائیں اور دائیں طرف ازحد نقل کی نشاندہی کرتے ہیں۔ ہم پہلے ہی سیکھ چکے ہیں کہ اسپرنگ میں خصوصی خاصیتیں پائی جاتی ہیں، جنھیں سب سے پہلے انگریز طبیعیات داں روبرٹ ہوک (Robert Hook) نے دریافت کیا تھا۔ انھوں نے ثابت کیا تھا کہ ایسے نظام میں اگر تخریب (Deformation) کر دی جائے تو اس میں بحالی قوتیں پیدا ہو جاتی ہیں، جن کی عددی قدریں تخریب یا نقل کے متناسب ہوتی ہیں اور وہ مخالف سمت میں کام کرتی ہیں۔ یہ ہوک کا قانون کہلاتا ہے (باب 9)۔ یہ اس نقل کے لیے درست ہے، جب

نقل، اسپرنگ کی لمبائی کے مقابلے میں چھوٹا ہو۔ کسی بھی وقت t پر، اگر بلاک کا نقل، اس کے وسطی مقام سے، x ہے، تو بلاک پر لگ رہی بحالی قوت F ہے۔

$$F(x) = -k\,x \quad (14.19)$$

تناسبیت کا مستقلہ k، اسپرنگ مستقلہ کہلاتا ہے۔ اس کی قدر، اسپرنگ کی لچکیلی خاصیتوں سے متعین ہوتی ہے۔ ایک سخت اسپرنگ کے k کی قدر زیادہ ہوتی ہے اور ایک نرم اسپرنگ کا k کم ہوتا ہے۔ مساوات (14.19)، SHM کے قوت کے قانون، کے یکساں ہے، اس لیے نظام ایک سادہ ہارمونی حرکت کرتا ہے۔ مساوات (14.14) سے،

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (14.20)$$

اور اہتزاز کار کا دوری وقت T :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (14.21)$$

مساوات (14.20) اور مساوات (14.21) سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ ایک سخت اسپرنگ (k کی بڑی قدر) اور ہلکے بلاک (کم کمیت) سے زاویائی تعدد کی بڑی قدر، اور اس لیے ایک چھوٹا دور، منسلک ہے۔

مثال 14.8: ایک $500\ \text{N m}^{-1}$ اسپرنگ مستقلہ کے اسپرنگ سے ایک $5\,kg$ کا کالر (Collar) منسلک ہے۔ یہ ایک افقی چھڑ پر، بغیر رگڑ کے، پھسلتا ہے۔ کالر کو اس کے وسطی مقام سے 10.0cm منتقل کیا جاتا ہے اور پھر چھوڑ دیا جاتا ہے۔ حساب لگائیے
(a) اہتزازات کا دور (b) ازحد رفتار
(c) کالر کا ازحد اسراع

جواب: (a) اہتزازات کا دور، مساوات (14.21) کے ذریعے۔

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{5.0\ \text{kg}}{500\ \text{N m}^{-1}}}$$

$$= (2\pi/10)\ \text{s}$$

$$= 0.63\ \text{s}$$

(b) SHM کرتے ہوئے کالر کی رفتار دی جاتی ہے:

$$\upsilon(t) = -A\omega \sin(\omega t + \phi)$$

چال کی ازحد قدر ہے

$$\upsilon_m = A\omega$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$= 0.1 \times \sqrt{\frac{500\ \text{N m}^{-1}}{5\ \text{kg}}}$$

$$= 1\ \text{m s}^{-1}$$

(c) توازن سے نقل $x(t)$ پر، کالر کا اسراع دیا جاتا ہے:

$$a(t) = -\omega^2\, x(t)$$

$$= -\frac{k}{m}\,x(t)$$

اس لیے اسراع کی ازحد قدر ہے

$$a_{max} = \omega^2 A$$

$$= \frac{500\ \text{N m}^{-1}}{5\ \text{kg}} \times 0.1\ \text{m}$$

$$= 10\ \text{m s}^{-2}$$

اور یہ منتہاؤں (Extremeties) پر ہوتا ہے۔

14.8.2 سادہ پنڈولم (The simple pendulum)

یہ کہا جاتا ہے کہ گلیلیو نے، ایک چرچ میں جھولتے ہوئے فانوس کا دور اپنی نبض کی دھڑکن کے ذریعے معلوم کیا تھا۔ انھوں نے بتایا کہ فانوس کی حرکت، دوری تھی۔ یہ نظام (فانوس) ایک طرح کا پنڈولم ہے۔ تقریباً 100 cm لمبے، ایک نہ کھینچ سکنے والے دھاگے سے ایک پتھر کا ٹکڑا باندھ کر آپ بھی اپنا پنڈولم تیار کر سکتے ہیں۔ اپنے پنڈولم کو ایک مناسب سہارے سے اس طرح لٹکا دیجیے کہ وہ اہتزاز کرنے کے لیے آزاد ہو۔ پتھر کو ایک سمت میں تھوڑا سا منتقل کیجیے اور پھر اسے چھوڑ دیجیے۔ پتھر اِدھر اُدھر حرکت کرتا ہے، جو دوری حرکت

ہے اور اس کا دور تقریباً 2 سیکنڈ ہے۔ کیا یہ حرکت سادہ ہارمونی ہے؟ اس سوال کا جواب حاصل کرنے کے لیے ہم ایک سادہ پنڈولم لیتے ہیں۔ یہ کمیت m کا ایک ذرہ ہے [جو پنڈولم کا بوب (Bob) کہلاتا ہے] جسے ایک نا کھینچ سکنے والی، بغیر کمیت کی (Massless) L لمبائی کی ایک ڈوری کے ایک سرے پر باندھ دیا گیا ہے اور ڈوری کا دوسرا سرا ایک استوار سہارے (Rigid Support) میں نصب ہے۔ جیسا کہ شکل (a) 14.19 میں دکھایا گیا ہے۔ بوب، آگے پیچھے (یا دائیں بائیں)، کہا جاسکتا ہے کہ چول (Pivot) کے نقطے سے گزرتے ہوئے صفحے کے مستوی میں، عمودی خط کے دائیں بائیں، جھولنے کے لیے آزاد ہے۔

بوب پر لگ رہی قوتیں ہیں: ڈوری کا تناؤ T (Tension) اور مادی کشش کی قوت $\mathbf{F_g}$ $(= m\,\mathbf{g})$ جیسا کہ شکل (b) 14.19 میں دکھایا گیا ہے۔ ڈوری انتصاب (Vertical) کے ساتھ زاویہ θ بناتی ہے۔ ہم قوت $\mathbf{F_g}$ کو ایک نصف قطری جز $F_g \cos\theta$ اور ایک مماسی جز $F_g \sin\theta$ میں تحلیل کرتے ہیں۔ نصف قطری جز کی ڈوری کا تناؤ تنسیخ (Cancellation) کر دیتا ہے کیوں کہ ڈوری کی لمبائی کی سمت میں کوئی حرکت نہیں ہو رہی ہے۔ مماسی جز (Tangential Component)، چول کے نقطے کے گرد ایک بحالی پیچ (Restoring Torque) پیدا کرتا ہے۔ یہ پیچ ہمیشہ بوب کے نقل کے مخالف کام کرتا ہے۔ اور بوب کو اس کے مرکزی مقام کی طرف واپس لانے کی کوشش کرتا ہے۔ مرکزی مقام، مقامِ توازن (Equilibrium Position) کہلاتا ہے $(\theta = 0)$، کیوں

(a)

(b)

شکل 14.18 (a) ایک سادہ پنڈولم (b) بوب پر کام کر رہی قوتیں ہیں: مادی کشش کی قوت F_g (= mg) اور ڈوری کا تناؤ T، مادی کشش کی قوت کا مماسی جز ایک بحالی قوت ہے جو پنڈولم کو مرکزی مقام پر واپس لانے کی کوشش کرتی ہے۔

کہ اگر پنڈولم جھول نہ رہا ہو تو وہ اس مقام پر حالت سکون میں ہوگا۔ بحالی پیچ τ دیا جاتا ہے:

$$\tau = -L\,(F_g \sin\theta) \qquad (14.22)$$

جہاں منفی علامت یہ نشاندہی کرتی ہے کہ پیچ، θ کو کم کرنے کے لیے کام کرتا ہے، اور L، قوت $(F_g \sin\theta)$ کی چول کے گرد معیار اثر بازو (Moment Arm) کی لمبائی ہے۔ گردشی حرکت کے لیے، ہمارے پاس ہے:

$$\tau = I\,a \qquad (14.23)$$

جہاں I، پنڈولم کا گردشی جمود (Rotational Inertia) ہے اور a، اس نقطے کے گرد، اس کا زاویائی اسراع ہے۔ مساوات (14.22) سے، ہمیں حاصل ہوتا ہے۔

$$-L\,(F_g \sin\theta) = I\,\alpha \qquad (14.24)$$

F_g کی عددی قدر یعنی mg رکھنے پر ہمیں ملتا ہے

$$-L\,m\,g \sin\theta = I\,\alpha$$

یا

$$a = -\frac{mgL}{I}\sin\theta \qquad (14.25)$$

اگر ہم فرض کرلیں کہ نقل θ چھوٹا ہے، تو ہم مساوات (14.25) کو سادہ بنا سکتے ہیں۔

ہم جانتے ہیں کہ $\sin\theta$ کو ظاہر کیا جاسکتا ہے:

$$\sin\theta = \theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} \pm \ldots \qquad (14.26)$$

جہاں θ، ریڈین میں ہے۔

اب اگر θ چھوٹا ہے تو $\sin\theta$ کی تقریبی قدر θ ہوگی، اور مساوات (14.25) اب لکھی جاسکتی ہے:

$$\alpha = -\frac{mgL}{I}\theta \qquad (14.27)$$

جدول (14.1) میں ہم نے زاویہ θ کی ڈگری میں قدریں، ان کے مساوی ریڈین میں قدریں اور مطابق، تفاعل $\sin\theta$ کی، قدریں دی ہیں۔ اس جدول سے دیکھا جاسکتا ہے کہ θ کی قدر اگر 20^0 تک بھی ہو، جب بھی $\sin\theta$ کی قدر اور θ کی ریڈین میں قدر تقریباً یکساں ہیں۔

جدول 14.1 $\sin\theta$ بہ طور زاویہ θ کا تفاعل

θ (ڈگری)	θ (ریڈین)	$\sin\theta$
0	0	0
5	0.087	0.087
10	0.0174	0.174
15	0.262	0.259
20	0.349	0.342

مساوات (14.27) مساوات (14.11) کا زاویائی مماثل (Angular Analogue) ہے، اور ہمیں بتاتی ہے کہ پنڈولم کا زاویائی اسراع، زاویائی نقل θ کے متناسب ہے لیکن علامت میں مخالف ہے۔ اس لیے، جب پنڈولم دائیں طرف حرکت کرتا ہے تو اس کا کھنچاؤ (بائیں طرف) بڑھتا ہے، یہاں تک کہ یہ رک جاتا ہے اور اپنی بائیں طرف لوٹنا شروع کردیتا ہے۔ اسی طرح جب پنڈولم بائیں جانب حرکت کرتا ہے تو اس کا دائیں جانب کا اسراع اسے دائیں طرف واپس لانے کی کوشش کرتا ہے (اور اسی طرح اور)، اس طرح یہ آگے پیچھے (دائیں، بائیں) SHM میں جھولتا ہے۔ اس لیے چھوٹے زاویوں سے جھولتے ہوئے سادہ پنڈولم کی حرکت تقریباً SHM ہے۔

مساوات (14.27) کا مساوات (14.11) سے مقابلہ کرنے پر ہم دیکھتے ہیں کہ سادہ پنڈولم کا زاویائی تعدد (Angular Frequency) ہے:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgL}{I}}$$

اور پنڈولم کا دور T ہے:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mgL}} \qquad (14.28)$$

ایک سادہ پنڈولم کی تمام کمیت اس کے بوب کی کمیت m میں مرتکز ہوتی ہے، جو کہ چول کے نقطے سے نصف قطر L پر ہے۔ اس لیے، اس نظام کے لیے، ہم لکھ سکتے ہیں: $I = mL^2$ اور مساوات (14.28) میں اسے رکھنے پر، ہمیں حاصل ہوتا ہے:

SHM - سعت کتنی چھوٹی ہونی چاہیے؟

جب آپ ایک سادہ پنڈولم کا دوری وقت معلوم کرنے کے لیے تجربہ کرتے ہیں، تو آپ کے استاد آپ سے کہتے ہیں کہ سعت (Amplitude) چھوٹی رکھیے۔ لیکن کیا آپ نے کبھی پوچھا ہے کہ کتنا چھوٹا، چھوٹا ہوگا؟ سعت 5^0 ہونا چاہیے، $0.5^0, 1^0, 2^0$؟ یا یہ $10^0, 20^0$ یا 30^0 ہوسکتا ہے؟

اسے اچھی طرح سمجھنے کے لیے بہتر ہوگا کہ آپ مختلف سعتوں کے لیے، بڑی سعتوں تک، دوری وقت ناپیں۔ بے شک، بڑے اہتزازات کے لیے آپ کو احتیاط برتنی ہوگی کہ پینڈولم ایک انتصابی مستوی (Vertical Plane) میں ہی حرکت کرے۔ آیئے چھوٹی سعت کے اہتزازات کے دوری وقت کو T (0) سے ظاہر کرتے ہیں اور سعت θ_0

کے لیے دوری وقت اس طرح لکھتے ہیں: $T(\theta_0) = cT\ (0)$،
جہاں c ایک ضرب کا جز ہے۔ اگر آپ c برخلاف θ_0 گراف کھینچیں،
تو آپ کو کچھ اس طرح کی قدریں حاصل ہوں گی:

θ_0	:	20^0	45^0	50^0	70^0	90^0
c	:	1.02	1.04	1.05	1.10	1.18

اس کا مطلب ہے، کہ 20^0 کی سعت پر، دوری وقت میں غلطی تقریباً 2% ہے اور 50^0 کی سعت پر تقریباً 5%، 70^0 کی سعت پر تقریباً 10% اور 90^0 کی سعت پر تقریباً 18%۔

تجربہ کے ذریعے آپ T (0) کی پیائش کبھی نہیں کر سکتے، کیوں کہ اس کا مطلب ہوگا کہ کوئی اہتزازات نہیں ہیں۔ نظری طور پر بھی، $\sin\theta$ ، θ کے بالکل درست طور پر، صرف $\theta = 0$ کے لیے مساوی ہے۔ θ کی باقی تمام قدروں کے لیے کچھ غیر درستگی صحت ہوگی۔ اور یہ فرق θ کی قدر میں اضافہ کے ساتھ بڑھتا جائے گا۔ اس لیے ہمیں یہ طے کرنا ہوگا کہ ہم کتنا سہو (Error) برداشت کر سکتے ہیں۔ کوئی بھی پیائش کبھی بھی کامل طور پر درست نہیں ہوتی۔ آپ کو ایسے سوالات پر بھی سوچنا ہوگا: ایک اسٹاپ واچ کی درستگی صحت (Accuracy) کیا ہے؟ آپ کو احساس ہوگا کہ اس سطح پر آپ کی پیائشوں کی درستگی صحت کبھی بھی 5% یا 10% سے زیادہ بہتر نہیں ہے۔ کیوں کہ اوپر دیے ہوئے جدول سے ظاہر ہوتا ہے کہ ایک پنڈولم کے دوری وقت میں زیادہ سے زیادہ 5% کا اضافہ ہوتا ہے، (اس کی کم سعت کی قدر کے مقابلے میں) اگر آپ سعت 50^0 کر دیں تو بھی۔ اس لیے آپ اپنے تجربات میں سعت 50^0 تک رکھ سکتے ہیں۔

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (14.29)$$

مساوات (14.29) ایک سادہ پنڈولم کے دوری وقت کے لیے ایک سادہ ریاضیاتی عبارت ظاہر کرتی ہے۔

مثال 14.9 ایک سادہ پنڈولم کی لمبائی کیا ہوگی؟ جو سیکنڈوں میں ٹِک ٹِک کرتا ہے۔

جواب: مساوات (14.24) سے، ایک سادہ پنڈولم کا دوری وقت دیا جاتا ہے:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

اس رشتہ سے ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$L = \frac{gT^2}{4\pi^2}$$

اس پنڈولم کا دوری وقت، جو سیکنڈوں میں ٹِک ٹِک کرتا ہے، 2s ہے۔

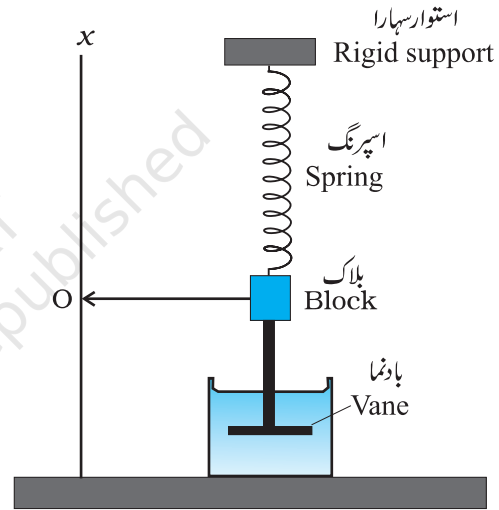
$$= \frac{9.8(\text{m s}^{-2}) \times 4(\text{s}^2)}{4\pi^2}$$

$$= 1\ m$$

14.9 قعری سادہ ہارمونی حرکت (DAMPED SIMPLE HARMONIC MOTION)

ہم جانتے ہیں کہ ایک ہوا میں جھولتے ہوئے سادہ پنڈولم کی حرکت آخر کار رک جاتی ہے۔ ایسا کیوں ہوتا ہے؟ یہ ہوا کی کشید (Drag) اور سہارے پر رگڑ کے پنڈولم کی حرکت کی مخالفت کرنے اور بتدریج پنڈولم کی توانائی کا اسرف (Dissipate) کرنے کی وجہ سے ہوتا ہے۔ کہا جاتا ہے کہ پنڈولم قعری اہتزازات (Dampid Oscillaion) کر رہا ہے۔ قعری اہتزازات میں حالاں کہ نظام کی توانائی کا لگاتار اسراف ہوتا رہتا ہے مگر اہتزازات بہ ظاہر دوری رہتے ہیں۔ اسرافی قوتیں، عام طور سے رگڑ کی قوتیں ہوتی ہیں۔ ایسی باہری قوتوں کا ایک اہتزاز کار پر اثر دیکھنے کے لیے ایک ایسا نظام لیتے ہیں، جیسا کہ شکل 14.20 میں دکھایا گیا ہے۔ یہاں ایک m کمیت کا بلاک ایک اسپرنگ مستقلہ k کے اسپرنگ پر انتصابی اہتزاز کرتا ہے۔ بلاک ایک چھڑ کے ذریعے ایک بادنما (Vane) سے منسلک ہے (بادنما اور چھڑ کی کمیت صفر مانی جاتی ہے)۔ بادنما ایک رقیق میں ڈوبی ہوئی ہے۔ جب بلاک اوپر نیچے اہتزاز کرتا ہے تو بادنما بھی اس کے ساتھ رقیق میں حرکت کرتی ہے۔ بادنما

کی اوپر نیچے حرکت رقیق کو اپنی جگہ سے ہٹاتی ہے، جو پھر اس پر اور اس طرح پورے اہتزاز کرتے ہوئے نظام پر ایک رکاوٹ ڈالنے والی، کشید قوت (Drag Force)، (لزج کشید Viscous Drag) لگاتی ہے۔ وقت کے ساتھ، بلاک۔اسپرنگ نظام کی میکانیکی توانائی کم ہوتی جاتی ہے، کیوں کہ یہ توانائی رقیق اور بادنما کی حراری توانائی میں منتقل ہوجاتی ہے۔

فرض کیجیے کہ رقیق کے ذریعے نظام پر لگائی گئی کشید قوت F_d * ہے۔ اس کی عددی قدر، بادنما یا بلاک کی رفتار $\mathbf{v}$ کے متناسب ہے۔ یہ قوتِ کشید، $\mathbf{v}$ کی مخالف سمت میں کام کرتی ہے۔

شکل 14.19 ایک قعری سادہ ہارمونی اہتزاز کار – رقیق میں ڈوبی ہوئی باد نما، اوپر نیچے اہتزاز کرتے ہوئے، بلاک پر ایک قعری قوت لگاتی ہے۔

یہ مفروضہ جب ہی تک درست ہے، جب بادنما آہستہ حرکت کر رہی ہو۔ تب x– محور پر حرکت کے لیے (انتصابی سمت، جیسا کہ شکل 14.20 میں دکھایا گیا ہے)، ہمارے پاس ہے۔

$$\mathbf{F}_d = -b\,\mathbf{v} \qquad (14.30)$$

جہاں b ایک قعری مستقلہ ہے، جو رقیق اور بادنما کی خصوصیتوں کے تابع ہے۔ منفی علامت یہ واضح کر دیتی ہے کہ، ہر ساعت پر، قوت، رفتار کے مخالف ہے۔

جب کمیت m کو اسپرنگ سے منسلک کیا جاتا ہے اور پھر چھوڑ دیا جاتا ہے، تو اسپرنگ کچھ تھوڑا سا لمبائی میں کھنچتا ہے اور پھر کمیت کسی ایک اونچائی پر رک جاتی ہے۔ یہ مقام، جسے شکل 14.20 میں O سے دکھایا گیا ہے، کمیت کا مقامِ توازن ہے۔ اگر کمیت کو تھوڑا سا نیچے کھینچا جائے یا تھوڑا سا اوپر ڈھکیلا جائے، تو اسپرنگ کی وجہ سے بلاک پر بحالی قوت ہوگی $\mathbf{F}_S = -k\mathbf{x}$ جہاں $\mathbf{x}$ کمیت کا مقام توازن سے نقل ہے۔ اس لیے، کسی بھی وقت t پر، کمیت پر لگ رہی کل قوت ہے: $\mathbf{F} = -k\mathbf{x} - b\mathbf{v}$، اگر وقت t پر، کمیت کا اسراع $a(t)$ ہے تو، x– محور پر قوت کے جز کے لیے، نیوٹن کے حرکت کے دوسرے قانون کے مطابق،

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - b\,v(t) \qquad (14.31)$$

یہاں ہم نے سمتی علامتوں کو استعمال نہیں کیا ہے، کیوں کہ ہم یک–ابعادی حرکت سے بحث کر رہے ہیں۔ $v(t)$ کے لیے dx/dt رکھنے پر اور اسراع $a(t)$ کے لیے d^2x/dt^2 رکھنے پر اور ارکان کو دوبارہ ترتیب دینے پر، مساوات (14.31) سے مندرجہ ذیل تفرقی مساوات حاصل ہوتی ہے:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + k\,x = 0 \qquad (14.32)$$

مساوات (14.32) کا حل، ایک ایسی قعری قوت کے زیرِ اثر، بلاک کی حرکت کو بیان کرتا ہے، جو رفتار کے متناسب ہے۔ حل اس شکل میں حاصل ہوتا ہے:

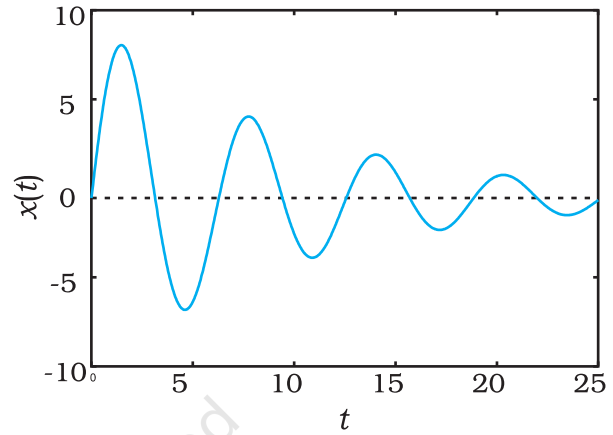
$$x(t) = A\,e^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi) \qquad (14.33)$$

جہاں A سعت ہے اور ω' قعری اہتزاز کار کا زاویائی تعدد ہے، جو دیا جاتا ہے:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \qquad (14.34)$$

اس تفاعل میں، Cosine تفاعل کا دور $2\pi/\omega'$ ہے، لیکن تفاعل $x(t)$، تاکیدی طور پر (Strictly) دوری نہیں ہے، کیوں کہ جز ضربی $e^{-bt/2m}$، وقت کے ساتھ، لگاتار کم ہوتا ہے۔ لیکن پھر بھی، اگر ایک دوری وقت T میں یہ کمی، چھوٹی ہو، تو مساوات (14.33) کے ذریعے ظاہر کی گئی حرکت تقریباً دوری ہے۔

*زمین کی قوت کشش کے زیرِ اثر، بلاک، اسپرنگ پر کسی خاص مقامِ توازن O پر ہوگا۔ یہاں x اس مقام سے نقل ظاہر کرتا ہے۔

حل، مساوات (14.33) کو گرافی طور پر، شکل (14.21) کی طرح دکھا یا جاسکتا ہے۔ ہم اسے ایک (Cosine) تفاعل مان سکتے ہیں، جس کی سعت $Ae^{-bt/2m}$ ہے، جو وقت کے ساتھ بتدریج کم ہوتی ہے۔

شکل 14.20 قعری ہارمونک اہتزازات میں نقل بہ طور تفاعل وقت ۔ قعر، منحنی a سے d تک لگاتار بڑھ رہا ہے۔

اگر $b = 0$ (کوئی قعر نہیں ہے)، تو مساوات (14.33) اور مساوات (14.34))، حسبِ ترتیب ، مساوات (14.4) اور (14.14b) میں تحلیل ہوجاتی ہیں، جو ایک غیر قعری اہتزاز کار کے لیے نقل اور زاویائی تعدد کی ریاضیاتی عبارتیں ہیں۔ ہم دیکھ چکے ہیں کہ ایک غیر قعری اہتزاز کار کی میکانیکی توانائی مستقلہ ہوتی ہے اور مساوات (14.18) $(E = 1/2\ k\ A^2)$ سے دی جاتی ہے۔ اگر قعر چھوٹا ہے تو ہم مساوات (14.18) میں $Ae^{-bt/2m}$ (قعری اہتزازوں کی سعت) کو A کی جگہ رکھ کر، $E(t)$ معلوم کرسکتے ہیں۔ اس طرح، ہمیں حاصل ہوتا ہے:

$$E(t) = \frac{1}{2} k A^2 e^{-bt/m} \qquad ((14.35)$$

مساوات (14.35) ظاہر کرتی ہے کہ نظام کی کل توانائی، وقت کے ساتھ قوت نمائی طور پر (Exponentially) کم ہوتی ہے۔ نوٹ کریں کہ چھوٹے قعر کا مطلب ہے کہ غیر ابعادی نسبت $\left(\frac{b}{\sqrt{k\,m}}\right)$، 1 سے، بہت کم ہے۔

◀ **مثال 14.10** شکل 14.19 میں دکھائے گئے قعری اہتزاز کار کے لیے، بلاک کی کمیت m، 200g ہے، $k = 90\ \text{N m}^{-1}$ ہے، قعر مستقلہ b، $40\ \text{g s}^{-1}$ ہے۔ حساب لگائیے: (a) اہتزاز کا دور (b) اس کے اہتزازوں کے سعت کی قدر، آغازی قدر کی نصف ہونے میں لگنے والا وقت (c) اس کی میکانیکی توانائی کو آغازی قدر کی نصف ہونے میں لگنے والا وقت۔

جواب: (a) ہم دیکھتے ہیں کہ:

$km = 90\times0.2 = 18\ \text{kg N m}^{-1} = \text{kg}^2\ \text{s}^{-2}$ اس لیے $\sqrt{km} = 4.243\ \text{kg s}^{-1}$ اور $b = 0.04\ \text{kg s}^{-1}$،

اس لیے b، $\sqrt{km}$ سے بہت چھوٹا ہے۔

اس لیے مساوات (14.34) سے دوری وقت T دیا جاتا ہے:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$= 2\pi\sqrt{\frac{0.2\ \text{kg}}{90\ \text{N m}^{-1}}}$$

$$= 0.3\ \text{s}$$

(b) اب مساوات (14.33) سے، وقت $T_{1/2}$ ، جو سعت کی قدر کو آغازی قدر کا نصف ہونے میں لگتا ہے، دیا جاتا ہے:

$$T_{1/2} = \frac{\ln(1/2)}{b/2m}$$

$$= \frac{0.693}{40} \times 2 \times 200\ \text{s}$$

$$= 6.93\ \text{s}$$

(c) وقت $t_{1/2}$ کا حساب لگانے کے لیے، جو اس کی توانائی (میکانیکی) کی قدر کو آغازی قدر کا نصف ہونے میں لگتا ہے، ہم مساوات (14.35) استعمال کرتے ہیں۔ ہمارے پاس ہے۔

$$E(t_{1/2})/E(0) = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

$$½ = \exp(-bt_{1/2}/m)$$

$$\ln(1/2) = -(bt_{1/2}/m)$$

$$t_{1/2} = \frac{0.693}{40\ \text{g s}^{-1}} \times 200\ \text{g}$$

$$= 3.46\ \text{s}$$

یہ سعت کے تنزل دور(Decay Period) کا نصف ہے۔ یہ کوئی حیرت کی بات نہیں۔ کیوں کہ مساوات(14.33) اور مساوات(14.35) کے مطابق، توانائی، سعت کے مربع پر منحصر ہے۔نوٹ کریں کہ دونوں قوت نمائیوں(Exponentials) کے قوت نماؤں(Exponents) میں 2 کا ایک جزِ ضربی ہے۔

14.10 جبری اہتزاز اور گمک (FORCED OSCILLATIONS AND RESONANCE)

ایک جھولے میں جھولتا ہوا شخص، جب کہ کوئی اسے دھکا نہ دے رہا ہو اور ایک سادہ پنڈولم، جسے اپنی جگہ سے ہٹا کر چھوڑ دیا گیا ہو، آزاد اہتزازات کی مثالیں ہیں۔ ان دونوں صورتوں میں، جھولنے کی سعت بتدریج کم ہوتی جائے گی اور نظام آخر کار حرکت بند کر دے گا۔ ہمیشہ موجود رہنے والی اسرافی قوتوں کی وجہ سے، آزاد اہتزازات کو، عملی طور پر، قائم نہیں رکھا جا سکتا۔ یہ قعری ہو جاتے ہیں، جیسا کہ ہم حصہ 14.9 میں دیکھ چکے ہیں۔لیکن اگر آپ، جھولے میں جھولتے ہوئے، دوری طور پر، زمین کو اپنے پیروں سے دبا کر ایک دھکا لگاتے رہیں تو آپ دیکھتے ہیں کہ نہ صرف اہتزازوں کو قائم رکھا جا سکتا ہے بلکہ ان کی سعت میں اضافہ بھی کیا جا سکتا ہے۔اس شرط کے تحت جھولے میں جبری(Forced) یا چلائے ہوئے(Driven) اہتزاز ہیں۔ جب ایک نظام ایک ہارمونی قوت کے زیرِ عمل، جبری اہتزازات کر رہا ہو، تو اس صورت میں دو زاویائی تعدد اہم ہو جاتے ہیں: (1) نظام کا قدرتی زاویائی تعدد ω ۔ یہ وہ تعدد ہے جس سے نظام اہتزاز کرے گا، اگر اسے اس کے مقام توازن سے ہٹا کر چھوڑ دیا جائے اور آزادانہ اہتزاز کرنے دیے جائیں ۔ اور (2) باہری قوت، جو جبری اہتزاز کرا رہی ہے، اس کا زاویائی تعدد ω_d ۔

فرض کیجیے ایک باہری قوت F(t)، جس کی سعت F_0 ہے اور جو وقت کے ساتھ دوری طور پر تبدیل ہوتی ہے، ایک قعری اہتزاز کار پر لگائی جاتی ہے۔ایسی قوت ظاہر کی جا سکتی ہے:

$$F(t) = F_o \cos \omega_d t \qquad (14.36)$$

ایک ایسے ذرہ کی حرکت، جس پر ایک خطّی بحالی قوت، قعری قوت اور تابع وقت، چلانے والی قوت (جو مساوات 14.36 سے ظاہر کی گئی ہے) لگ رہی ہوں، دی جا سکتی ہے:

$$m\,a(t) = -k\,x(t) - bv(t) + F_o \cos \omega_d t \qquad (14.37a)$$

مساوات(14.37a) میں اسراع a(t) کی جگہ d^2x/dt^2 رکھنے پر اور ارکان کو دوبارہ ترتیب دینے پر، حاصل ہوتا ہے۔

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F_o \cos \omega_d t \qquad (14.37b)$$

یہ کمیت m کے اس اہتزاز کار کی مساوات ہے، جس پر ایک زاویائی تعدد ω_d کی دوری قوت لگائی گئی ہے۔ یہ اہتزاز کار آغاز میں اپنے قدرتی تعدد ω سے اہتزاز کرتا ہے۔ جب ہم باہری دوری قوت لگاتے ہیں تو قدرتی تعدد کے ساتھ ہونے والے اہتزازات رکتے جاتے ہیں اور پھر جسم باہری دوری قوت کے زاویائی تعدد کے ساتھ اہتزاز کرنے لگتا ہے۔قدرتی اہتزازات رک جانے کے بعد، اس کا نقل دیا جاتا ہے:

$$x(t) = A \cos(\omega_d t + \phi) \qquad (14.38)$$

جہاں وقت t اس ساعت سے ناپا گیا وقت ہے، جب باہری دوری قوت لگائی جاتی ہے۔

سعت A، جبری تعدد ω_d اور قدرتی تعدد ω کا تفاعل ہے۔تجزیہ دکھاتا ہے کہ یہ دیا جاتا ہے۔

$$A = \frac{F_o}{\left\{m^2\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)^2 + \omega_d^2 b^2\right\}^{1/2}} \qquad (14.39a)$$

اور

$$\tan \phi = \frac{-v_o}{\omega_d x_o}$$

جہاں m ذرہ کی کمیت ہے اور v_0 اور x_0 ، وقت t = 0 پر، یعنی اس ساعت پر جب باہری دوری قوت لگائی جاتی ہے، ذرہ کی رفتار اور اس کا نقل

ہے۔ مساوات (14.39) ظاہر کرتی ہے کہ جبری اہتزاز کار کی سعت، چلانے والی قوت (Driving Force) کے زاویائی تعدد پر منحصر ہے۔ جب ω_d ، ω سے بہت مختلف ہوتی ہے اور ω کے بہت نزدیک ہوتی ہے تو دونوں صورتوں میں اہتزاز کار کا بالکل مختلف برتاؤ دیکھنے میں آتا ہے۔ ہم یہ دونوں صورتیں لیتے ہیں:

(a) چھوٹا قعر، چلانے والا تعدد، قدرتی تعدد سے بہت مختلف ہے: اس صورت میں، $\omega_d b$ ، $m(\omega^2 - \omega^2_d)$ سے بہت چھوٹا ہوگا اور ہم اسے نظرانداز کر سکتے ہیں۔ تب مساوات (14.39) سے حاصل ہوتا ہے:

$$A = \frac{F_o}{m\left(\omega^2 - \omega_d^2\right)} \qquad (14.40)$$

شکل 14.22 میں، ایک اہتزاز کار کے نقل سعت کا چلانے والی قوت کے تعدد پر انحصار، نظام میں موجود مختلف مقدراوں کے قعر کے لیے، دکھایا گیا ہے۔ یہ نوٹ کیا جا سکتا ہے کہ دکھائی گئی تمام صورتوں میں، سعت کی قدر ازحد ہے، جب: $\omega_d / \omega = 1$ اس شکل کے منحنی ظاہر کرتے ہیں کہ قعر جتنا کم ہوتا ہے، گمک فراز (Resonance Peak) اتنا ہی اونچا اور پتلا ہوتا ہے۔

اگر ہم چلانے والا تعدد تبدیل کرتے رہیں، تو سعت لامتناہی کے نزدیک ہو جاتی ہے، جب یہ قدرتی تعدد کے مساوی ہوتی ہے۔ لیکن یہ صفر قعر والی ایک مثالی صورت ہے، جو حقیقی نظاموں میں کبھی نہیں پیدا ہوتی کیوں کہ قعر کبھی بھی کامل طور پر صفر نہیں ہوتا۔ آپ نے جھولا جھولتے وقت محسوس کیا ہوگا کہ جب آپ کے ڈھکیلنے کے اوقات اور جھولے کا دور بالکل درست طور پر ایک دوسرے سے ملتے ہوتے ہیں، آپ کے جھولے کی سعت ازحد ہو جاتی ہے۔ یہ سعت، بڑی ہے لیکن لاانتہا نہیں، کیوں کہ آپ کے جھولے میں ہمیشہ کچھ نہ کچھ قعر ضرور رہے۔ یہ (b) میں اور واضح ہو جائے گا۔ (b) چلانے والا تعدد، قدرتی تعدد کے نزدیک ہے: اگر ω_d ، ω کے نزدیک ہو تو $m(\omega^2 - \omega_d^2)$ ، $\omega_d b$ سے بہت کم ہوگا۔

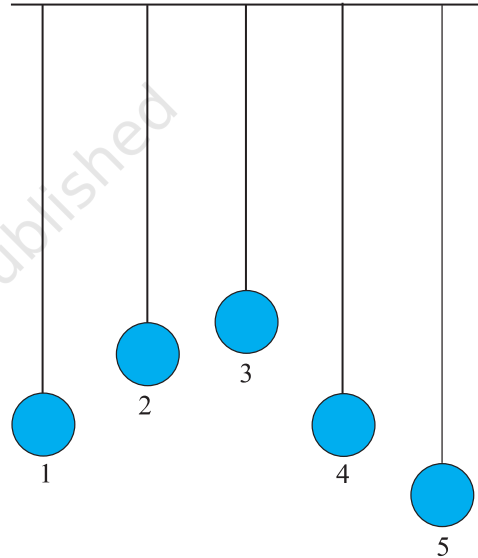
(b کی کسی بھی معقول قدر کے لیے)، اور مساوات (14.39) سے حاصل کیا جا سکتا ہے

شکل 14.21 ایک قعری اہتزاز کار کی سعت بطور چلانے والی قوت کے زاویائی تعدد کا تفاعل (گمک شرط $\omega_d / \omega = 1$ پر سعت سب سے زیادہ ہے۔ یہ تین منحنی، نظام میں موجود قعر کی مختلف قدروں سے مطابقت رکھتے ہیں۔ منحنی 1 اور 3 سب سے کم اور سب سے زیادہ قعر سے مطابقت رکھتے ہیں۔

$$A = \frac{F_o}{\omega_d b} \qquad (14.41)$$

اس سے واضح ہوتا جاتا ہے ایک دی ہوئی چلانے والے تعدد کی قدر کے لیے، ازحد ممکنہ سعت، چلانے والی قوت کے تعدد اور قعر سے معین ہوتی ہے، اور کبھی لامتناہی نہیں ہوتی۔ چلانے والی قوت کے تعدد کی قدر، اہتزاز کار کے قدرتی تعدد کے قدر کے قریب ہونے پر، سعت میں اضافہ کا مظہر گمک (Resonance) کہلاتا ہے۔

ہم اپنی روزانہ زندگی میں ایسے بہت سے مظاہر دیکھتے ہیں، جن میں گمک شامل ہوتی ہے۔ آپ کا جھولے کے ساتھ تجربہ بھی گمک کی ایک اچھی مثال ہے۔ آپ نے ضرور محسوس کیا ہوگا کہ زیادہ اونچائی تک پینگ بڑھانے کی مہارت کا دارومدار، زمین پر پیر مارنے کے تعدد اور جھولے کے قدرتی تعدد میں ہم وقتی (Synchronisation) پیدا کرنے پر ہے۔

اس نقطہ کی مزید وضاحت کرنے کے لیے، ہم مختلف لمبائیوں کے، ایک مشترکہ رسی سے خاص ترتیب میں لٹکے ہوئے، پانچ پنڈلموں کا ایک سیٹ لیتے ہیں، جیسا کہ شکل14.23 میں دکھایا گیا ہے۔ پنڈولم 1 اور 4 کی لمبائیاں یکساں ہیں اور دوسرے پنڈولموں کی لمبائیاں مختلف ہیں۔ اب ہم پنڈولم 1 کو حرکت میں لاتے ہیں۔ اس پنڈولم سے توانائی، منسلک کرنے والی رسی کے ذریعے، دوسرے پنڈولموں میں منتقل ہو جاتی ہے اور بھی اہتزاز کرنا شروع کر دیتے ہیں۔ چلانے والی قوت، منسلک کرنے والی رسی کے ذریعے مہیا کی جاتی ہے۔ اس قوت کا تعدد وہ ہے جس سے پنڈولم 1 اہتزاز کرتا ہے۔ اگر ہم پنڈولم 2،3 اور 5 کا ردعمل دیکھیں، تو وہ اپنے قدرتی تواتر سے اور مختلف

شکل 14.22 ایک مشترکہ رسی سے لٹکے ہوئے پانچ سادہ پنڈولموں کا نظام

سعتوں کے ساتھ اہتزازات کرتے ہیں۔ لیکن یہ حرکت بتدریج قعری ہوتی جاتی ہے اور آخر کار وہ پنڈولم 1 کے تواتر سے اہتزاز کرنے لگتے ہیں۔ ان کی چھوٹی ہوتی ہے۔ پنڈولم 4 کا ردعمل، ان تینوں پنڈولموں کے سیٹ کے ردعمل سے بالکل مختلف ہے۔ پنڈولم 4، پنڈولم 1 کے تواتر سے اہتزاز کرتا ہے اور اس کی سعت بتدریج بڑھتے ہوئے بہت زیادہ ہو جاتی ہے ایک گمک جیسا ردعمل نظر آتا ہے۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کیوں کہ اس صورت میں گمک کے لیے شرط مطمئن ہوتی ہے، یعنی کہ نظام کا قدرتی تواتر، چلانے والی قوت کے تواتر پر منطبق ہے۔

تمام میکانیکی تنصیبات کے ایک یا زیادہ قدرتی تواتر ہوتے ہیں اور اگر اس پر ایک ایسی طاقت ور، باہری، دوری، چلانے والی قوت لگائی جائے جس کا تواتر، ان کے قدرتی تواتروں میں سے کسی ایک سے میل کھاتا ہو تو تنصیب میں پیدا ہونے والے اہتزازات اس میں دراڑ ڈال سکتے ہیں۔ Puget Sound, Washington, USA- میں The Tacoma Narrows Bridge کو 1، جولائی 1940 میں کھولا گیا۔ 4 مہینوں بعد ہواؤں نے ایک ایسی اہتزازی ماحصل قوت پیدا کی، جو پل کے قدرتی تواتر سے گمک میں تھی۔ اس سے اہتزاز کی سعت میں لگاتار اضافہ ہوتا رہا، یہاں تک کہ پل ٹوٹ گیا۔ اسی وجہ سے ایک پل پر سے گذرتے ہوئے، فوجی، پریڈ کرنا بند کر دیتے ہیں۔ ہوائی جہاز ڈیزائن کرنے والے اس بات کو یقینی بناتے ہیں کہ جن جن قدرتی تواتروں پر، ایک پر اہتزاز کر سکتا ہے، ان میں سے کوئی بھی اڑان کر رہے انجنوں کے تواتر سے میل نہ کھائے۔ زلزلوں سے بہت نقصان ہوتا ہے۔ یہ نوٹ کرنا دلچسپ ہوگا کہ کبھی کبھی ایک زلزلے کے دوران کم اور زیادہ اونچائی کی عمارتوں پر اثر نہیں پڑتا جبکہ درمیانی اونچائی کی عمارتیں گر جاتی ہیں۔ ایسا اس لیے ہوتا ہے کیوں کہ زلزلے کی لہروں کے تعدد کے مقابلے میں، اونچی عمارتوں کا تعدد زیادہ ہوتا ہے اور نیچی عمارتوں کا تعدد کم ہوتا ہے۔

خلاصہ

1. جو حرکت اپنے آپ کو دہراتی ہے، دوری حرکت کہلاتی ہے۔
2. دور T ، ایک مکمل اہتزاز یا سائیکل میں لگنے والا وقت ہے۔ اس کا تعدد ν سے رشتہ ہے:

$$T = \frac{1}{\nu}$$

دوری یا اہتزازی حرکت کا تعدد، اہتزازوں کی تعداد فی اکائی وقت ہے۔ S1 میں اسے ہرٹز میں ناپا جاتا ہے۔

$$1 \text{ Hertz} = 1 \text{ Hz} = 1 (\text{اہتزاز فی سیکنڈ}) = 1\text{s}^{-1}$$

3. سادہ ہارمونی حرکت میں، ایک ذرہ کا اپنے مقامِ توازن سے نقل $x(t)$ دیا جاتا ہے:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi) \quad (\text{نقل})$$

جہاں A، نقل کی سعت ہے۔ مقدار $(\omega t + \phi)$ حرکت کا فیز ہے اور ϕ فیز مستقلہ ہے۔ زاویائی تعدد ω کے حرکت کے دور اور تعدد سے رشتے ہیں:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu \qquad (\text{زاویائی تعدد})$$

4. سادہ ہارمونی حرکت کو ایسے بھی سمجھا جا سکتا ہے کہ یہ یکساں دائری حرکت کا اس دائرے کے قطر پر ظل ہے، جس پر دائری حرکت ہو رہی ہے۔

5. SHM کے دوران رفتار اور اسراع بہ طور تفاعل وقت دیے جاتے ہیں:

$$v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (\text{رفتار})$$

$$a(t) = -\omega^2 A \sin(\omega t + \phi)$$

$$= -\omega^2 x(t) \qquad (\text{اسراع})$$

اس طرح ہم دیکھتے ہیں کہ ایک سادہ ہارمونی حرکت کرتے ہوئے جسم کی رفتار اور اس کا اسراع دونوں دوری تفاعل ہیں، جن میں رفتار سعت v_m اور اسراع سعت a_m، بالترتیب ہیں:

$$a_m = \omega^2 A \text{، } v_m = \omega A$$

6. سادہ دوری حرکت میں کام کر رہی قوت، نقل کے متناسب ہوتی ہے اور ہمیشہ، اس کی سمت حرکت کے مرکز کی جانب ہوتی ہے۔

7. ایک سادہ ہارمونی حرکت کرتے ہوئے ذرے کی، کسی بھی ساعت وقت پر، حرکی توانائی: $K = ½\, mv^2$ اور توانائی بالقوۃ: $U = ½\, kx^2$ ہوتی ہیں۔ اگر کوئی رگڑ موجود نہ ہو، تو نظام کی میکانیکی توانائی $E = K + U$، ہمیشہ مستقلہ رہتی ہے، حالاں کہ K اور U وقت کے ساتھ تبدیل ہوتی ہیں۔

8. m کمیت کا ایک ذرہ جو ہوک کے قانون کے ذریعے دی گئی بحالی قوت: $F = -kx$ کے زیر اثر اہتزاز کر رہا ہو، سادہ ہارمونی حرکت کا اظہار کرتا ہے۔ جس کے لیے

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (\text{زاویائی توانائی})$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (\text{دور})$$

ایسے نظام کو خطی اہتزاز کار بھی کہتے ہیں۔

.9 چھوٹے زاویوں سے اہتزاز کرتے ہوئے ایک سادہ پنڈولم کی حرکت، تقریبی طور پر سادہ ہارمونی ہوتی ہے۔ اس کا اہتزاز کا دور دیا جاتا ہے۔

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

.10 ایک اہتزاز کرتے ہوئے حقیقی نظام میں، اہتزازات کے دوران میکانیکی توانائی کم ہوتی جاتی ہے، کیوں کہ باہری قوتیں، جیسے کشید، اہتزازوں میں رکاوٹ پیدا کرتی ہیں اور میکانیکی توانائی کو حرارتی توانائی میں منتقل کر دیتی ہیں۔ اس صورت میں، حقیقی اہتزاز کار اور اس کی حرکت، قعری کہلاتے ہیں۔ اگر قعر قوت: $F_d = -bv$. سے دی جائے، جہاں v اہتزاز کار کی رفتار اور b ایک قعر مستقلہ ہے، تو اہتزاز کار کا نقل دیا جاتا ہے:

$$x(t) = Ae^{-bt/2m}\cos(\omega' t + \phi)$$

جہاں ω' قعری اہتزاز کار کا زاویائی تعدد، دیا جاتا ہے:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

اگر قعر مستقلہ چھوٹا ہو، تب: $\omega' = \omega$، جہاں ω غیر قعری اہتزاز کار کا زاویائی تعدد ہے۔ قعری اہتزاز کار کی میکانیکی توانائی E دی جاتی ہے:

$$E(t) = \frac{1}{2}kA^2e^{-bt/m}$$

.11 اگر ایک باہری قوت، جس کا زاویائی تواتر ω_d ہے، ایک قدرتی زاویائی تواتر ω والے، اہتزاز کر رہے نظام پر لگتی ہے تو نظام زاویائی تواتر ω_d سے اہتزاز کرتا ہے۔ اہتزاز کی سعت، سب سے زیادہ ہوتی ہے جب،

$$\omega_d = \omega$$

ایک شرط جو گمک کہلاتی ہے۔

طبعی مقدار	علامت	ابعاد	اکائی	ریمارک
دور	T	[T]	s	حرکت کے اپنے آپ کو دہرانے کا کم ترین وقت
تعدد	ν (or f)	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\nu = \frac{1}{T}$
زاویائی تعدد	ω	$[T^{-1}]$	s^{-1}	$\omega = 2\pi\nu$
فیز مستقلہ	ϕ	غیر ابعادی	rad	SHM میں نقل کے فیز کی آغازی قدر
قوت مستقلہ	k	$[MT^{-2}]$	Nm^{-1}	سادہ ہارمونی حرکت $F = -kx$

قابلِ غور نکات

1. دور T وہ کم ازکم وقت ہے، جس کے بعد حرکت اپنے آپ کو دہراتی ہے۔ اس لیے حرکت اپنے آپ کو nT کے بعد دہراتی ہے، جہاں n ایک عدد صحیح ہے۔
2. ہر دوری حرکت، سادہ ہارمونی حرکت نہیں ہوتی۔ صرف وہ دوری حرکت، جو قوت قانون $F = -kx$ کے تابع ہوتی ہے، سادہ ہارمونی ہوتی ہے۔
3. دائری حرکت، ایک مقلوب ربع قانون قوت (جیسے سیاروں کی حرکت میں) کی وجہ سے اور سادہ ہارمونی قوت کی وجہ سے پیدا ہو سکتی ہے۔ یہ سادہ ہارمونی قوت دو ابعاد میں: $-m\omega^2 r$ کے مساوی ہے۔ دوسری صورت میں، دو عمودی سمتوں میں، حرکت کے فیزوں میں $\pi / 2$ کا فرق ہونا ضروری ہے۔ اس لیے مثال کے طور پر اگر ایک ذرہ، جس پر قوت $(-m\omega^2 r)$ لگ رہی ہو اور اس کا آغازی مقام (O, A) اور آغازی رفتار $(\omega A, \phi)$ ہو، ایک نصف قطروں کے دائرہ میں یکساں حرکت کرے گا۔
4. ایک دی ہوئی ω کی قدر کے ساتھ خطی سادہ ہارمونی حرکت کے لیے دو آغازی شرائط، حرکت کو مکمل طور پر معلوم کرنے کے لیے، لازم اور مکتفی ہیں۔ یہ آغازی شرائط ہو سکتی ہیں (i) آغازی مقام اور آغازی رفتار یا (ii) سعت اور فیز یا (iii) توانائی اور فیز۔
5. اوپر دیے ہوئے نکتہ 4 سے، دی ہوئی سعت یا توانائی کی قدر کے لیے، حرکت کا فیز، آغازی مقام یا آغازی رفتار سے معلوم کیا جا سکتا ہے۔
6. دو سادہ ہارمونی حرکتوں، جن کی سعتیں اور فیز بے قاعدہ ہوں، کا مجموعہ لازمی نہیں ہے کہ دوری ہو۔ یہ صرف تب ہی دوری ہوگا جب ایک حرکت کا تعدد دوسری حرکت کے تعدد کا صحیح عددی ضعف ہو۔ لیکن ایک دوری حرکت کو ہمیشہ ایسے لاتعداد ہامونی حرکتوں کے مجموعے کے ذریعے ظاہر کیا جا سکتا ہے، جن کے مناسب سعتیں ہوں۔
7. SHM کا دور، سعت یا توانائی یا فیز مستقلہ کے تابع نہیں ہے۔ اس کا مادی کشش کے تحت، سیاروں کے مدار کے دوروں سے (کیپلر کا تیسرا قانون) موازنہ کیجیے۔
8. چھوٹے زاویائی نقل کے لیے، ایک سادہ پنڈولم کی حرکت، سادہ ہارمونی ہے۔
9. ایک ذرے کی حرکت کو سادہ ہارمونی ہونے کے لیے، اس کے نقل x کو مندرجہ ذیل شکلوں میں سے کسی ایک میں ظاہر کیا جا سکنا لازمی ہے۔

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t$$

$$x = A \cos (\omega t + \alpha), \quad x = B \sin (\omega t + \beta)$$

یہ تینوں شکلیں ایک دوسرے سے مکمل طور پر یکساں ہیں (کسی کو بھی باقی دو کی شکل میں ظاہر کیا جا سکتا ہے)۔ اس لیے، تعری

سادہ ہارمونی حرکت [مساوات (14.31)] بالکل درست طور پر سادہ ہارمونی نہیں ہے۔ یہ صرف تقریباً ایسی ہے اگر وقفہ وقت $2/m$ سے بہت کم ہوں، جہاں b، قعر مستقلہ ہے۔

10. قعری اہتزازات میں، ذرہ کی قائم حالت حرکت (جب قعری اہتزازات رک جاتے ہیں) سادہ ہارمونی حرکت ہے، جس کا تعدد چلا رہی تعدد ω_d ہے، ذرہ کا قدرتی تعدد ω نہیں۔

11. صفر قعر کی مثالی صورت میں، گمک پر، سادہ ہارمونی حرکت کی سعت، لاانتہا ہوتی ہے۔ یہ کوئی مسئلہ نہیں ہے۔ یہ صورت کبھی پیش نہیں آتی، کیوں کہ ہر حقیقی نظام میں کچھ قعر ہوتا ہے، چاہے اس کی قدر کتنی بھی کم ہو۔

12. قعری اہتزازات میں، ذرے کے ہارمونی حرکت کا فیز، چلا رہی قوت کے فیز سے مختلف ہوتا ہے۔

مشق

14.1 مندرجہ ذیل مثالوں میں سے کون سی مثالیں دوری حرکت ظاہر کرتی ہیں؟

(a) ایک تیراک جو دریا کے ایک کنارے سے دوسرے کنارے تک جا کر واپس پہلے کنارے پر لوٹ کر ایک چکر پورا کرتا ہے۔

(b) ایک آزادانہ لٹکی ہوئی مقناطیسی چھڑ، جسے اس کی N-S سمت سے ہٹا کر چھوڑ دیا جاتا ہے۔

(c) ایک ہائیڈروجن مالیکیول جو اپنے مرکز کمیت کے گرد گردش کر رہا ہے۔

(d) ایک کمان سے چھوڑا ہوا تیر۔

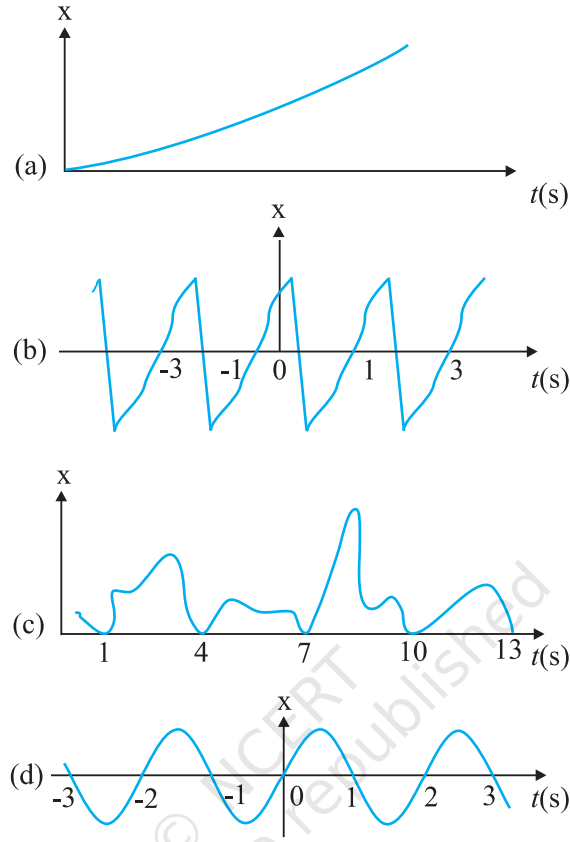
14.2 مندرجہ ذیل میں سے کون سی مثالیں تقریباً سادہ ہارمونی حرکت کو ظاہر کرتی ہیں اور کون سی مثالیں ایسی حرکت کو ظاہر کرتی ہیں جو دوری ہے لیکن سادہ ہارمونی نہیں؟

(a) اپنے محور پر زمین کی گردش۔

(b) ایک U ٹیوب میں اہتزاز کرتے ہوئے پارہ کے کالم کی حرکت۔

(c) ایک چکنے خمیدہ پیالے میں بال بیرنگ (Ball Bearing) کی حرکت، جب اسے پیالے میں سب سے نچلے نقطے سے ذرا اوپر چھوڑا جائے۔

(d) ایک کثیر ایٹمی مالیکیول کے اپنے مقامِ توازن کے گرد عمومی ارتعاش

14.3 شکل 14.23 میں ایک ذرے کی خطی حرکت کے چار x–t گراف دکھائے گئے ہیں۔ کون سے گراف دوری حرکت کو ظاہر کرتے ہیں؟ حرکت کا دور کیا ہے (دوری حرکت کی صورت میں)؟

شکل 14.25

14.4 مندرجہ ذیل میں کون سے وقت کے تفاعلات ظاہر کرتے ہیں (a) سادہ ہارمونی حرکت (b) دوری لیکن سادہ ہارمونی حرکت نہیں، (c) غیر دوری حرکت۔ ہر دوری حرکت کے لیے دور بتایئے۔ (ω ایک مثبت مستقلہ ہے):

(a) $\sin \omega t - \cos \omega t$

(b) $\sin^3 \omega t$

(c) $3 \cos (\pi/4 - 2\omega t)$

(d) $\cos \omega t + \cos 3\omega t + \cos 5\omega t$

(e) $\exp (-\omega^2 t^2)$

(f) $1 + \omega t + \omega^2 t^2$

14.5 ایک ذرہ دو نقاط A اور B کے درمیان، جو ایک دوسرے سے 10 cm کے فاصلے پر ہیں، خطی سادہ ہارمونی حرکت کرتا ہے۔ A سے B تک کی سمت کو مثبت سمت لیتے ہوئے ذرہ کی رفتار، اس کا اسراع اور اس پر لگ رہی قوت کی علامتیں بتایئے، جب کہ ذرہ

(a) سرے A پر ہے۔

(b) سرے B پر ہے۔

(c) AB کے وسطی نقطے پر ہے اور A کی طرف جا رہا ہے۔

(d) B سے 2 cm کے فاصلے پر ہے اور A کی طرف جا رہا ہے۔

(e) A سے 3 cm کے فاصلے پر ہے اور B کی طرف جا رہا ہے۔

(f) B سے 4 cm کے فاصلے پر ہے اور A کی طرف جا رہا ہے۔

14.6 ایک ذرہ کے اسراع a اور نقل x کے درمیان، مندرجہ ذیل رشتوں میں سے کون سے رشتے میں سادہ ہارمونی حرکت شامل ہے:

(a) $a = 0.7x$

(b) $a = -200x^2$

(c) $a = -10x$

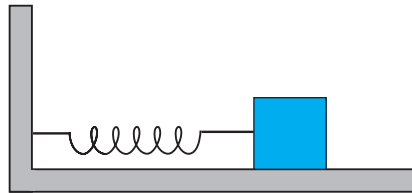
(d) $a = 100x^3$

14.7 ایک سادہ ہارمونی حرکت کرتے ہوئے ذرہ کی حرکت مندرجہ ذیل نقل تفاعل سے بیان کی جاتی ہے:

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

اگر ذرہ کا آغازی (t=0) مقام 1 cm اور اس کی آغازی رفتار ω cm/s ہے، تو اس کی سعت اور آغازی فیز زاویے کی قدریں کیا ہیں؟ ذرہ کا زاویائی تواتر π s^{-1} ہے۔ اگر ہم ذرہ کے SHM کو بیان کرنے کے لیے cosine تفاعل کی جگہ sine تفاعل لیں: $x = B \sin(\omega t + \alpha)$، تو مندرجہ بالا آغازی شرائط کے ساتھ، سعت اور آغازی فیز کی کیا قدریں ہوں گی؟

14.8 ایک اسپرنگ ترازو کا اسکیل 0 سے 50 kg تک ناپتا ہے۔ اسکیل کی لمبائی 20 cm ہے۔ اس ترازو سے لٹکائے گئے ایک جسم کو جب تھوڑا سا ہٹا کر چھوڑ دیا جاتا ہے تو وہ 0.65 کے دور سے اہتزاز کرتا ہے۔ جسم کا وزن کیا ہے؟

14.9 ایک اسپرنگ، جس کا اسپرنگ مستقلہ $1200\ N\ m^{-1}$ ہے، ایک افقی میز پر نصب کیا گیا ہے، جیسا کہ شکل 14.24 میں دکھایا گیا ہے۔ اسپرنگ کے آزاد سرے سے 3 kg کی کمیت منسلک کی گئی ہے۔ کمیت کو 2.0cm کے فاصلے تک کھینچا جاتا ہے اور پھر چھوڑ دیا جاتا ہے۔ معلوم کیجیے: (i) اہتزازات کا تعدد (ii) کمیت کا ازحد اسراع (iii) کمیت کی ازحد چال۔

شکل 14.24

14.10 مشق 14.9 میں، ہم جب اسپرنگ کھینچی ہوئی نہیں ہے، تو کمیت کے مقام کو $x = 0$ مان لیتے ہیں اور بائیں سے دائیں کی

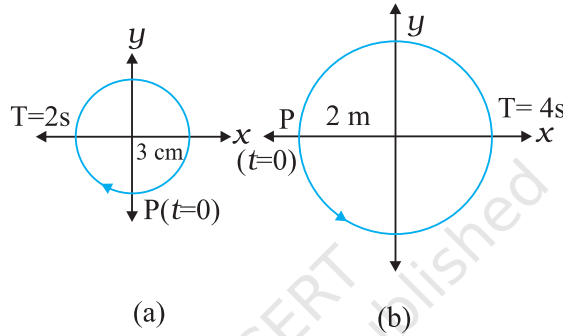
سمت کو x- محور کی مثبت سمت مانتے ہیں۔ اہتزاز کرتی ہوئی کمیت کے لیے x بہ طور وقت t کے تفاعل دیجیے، اگر ہم جس ساعت پر اسٹاپ واچ شروع کرتے ہیں ($t = 0$)، اس وقت کمیت ہے:

(a) وسطی مقام پر

(b) ازحد کھینچے ہوئے مقام پر

(c) ازحد دبے ہوئے مقام پر

14.11 شکل 14.25، دو دائری حرکتوں سے مطابقت رکھتی ہے۔ دائرہ کا نصف قطر، ایک گردش کا دور، آغازی مقام، گردش کی سمت (یعنی کہ گھڑی کی سوئیوں کی سمت میں یا اس کے مخالف) ہر شکل میں دکھائی گئی ہیں:

شکل 14.25

دونوں صورتوں میں، گردش کرتے ہوئے ذرے p کے نصف قطر سمتیہ کے x- ظل کی متطابق سادہ ہارمونی حرکت حاصل کیجیے۔

14.12 مندرجہ ذیل سادہ ہارمونی حرکتوں کے لیے متطابق حوالہ دائرہ کھینچیے۔ ذرہ کے آغازی مقام ($t = 0$)، دائرہ کے نصف قطر اور گردش کرتے ہوئے ذرہ کی زاویائی چال کی نشاندہی کیجیے۔ آسانی کے لیے، ہر صورت میں، گردش کی سمت، گھڑی کی سوئیوں کی مخالف سمت مان لیجیے۔ (x، cm میں ہے اور t سیکنڈ میں)۔

(a) $x = -2 \sin (3t + \pi/3)$

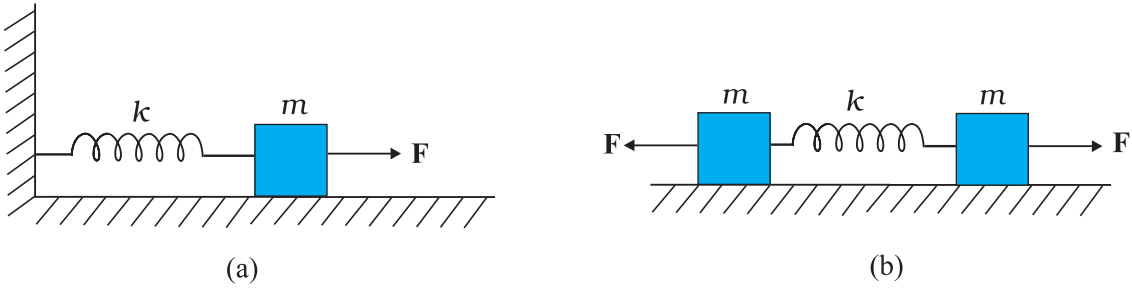
(b) $x = \cos (\pi/6 - t)$

(c) $x = 3 \sin (2\pi t + \pi/4)$

(d) $x = 2 \cos \pi t$

14.13 شکل (a) 14.26 میں ایک اسپرنگ، جس کا قوت مستقلہ k ہے اور جو ایک سرے پر استوار طور پر نصب ہے اور جس کے دوسرے آزاد سرے پر ایک کمیت m منسلک ہے، دکھایا گیا ہے۔ آزاد سرے پر لگائی گئی ایک قوت F اسپرنگ کو کھینچتی ہے۔ شکل (b) 14.26 میں اسی اسپرنگ کو دونوں آزاد سروں کے ساتھ دکھایا گیا ہے اور دونوں سروں سے کمیتیں m منسلک ہیں۔ شکل 14.26(b) میں دکھائے گئے اسپرنگ کے ہر سرے پر یکساں قوت F لگائی جاتی ہے۔

(a)

(b)

شکل 14.26

(a) دونوں صورتوں میں، اسپرنگ میں ازحد توسیع کتنی ہوگی؟

(b) اگر شکل (a) میں کمیت کو اور شکل (b) میں دونوں کمیتوں کو چھوڑ دیا جائے، تو ہر صورت میں، اہتزاز کا دور کیا ہوگا؟

14.14 ایک گاڑی کے استوانے میں لگے پسٹن کی ایک ضرب (Stroke) (سعت کا دگنا) 1.0 m کی ہے۔ اگر پسٹن سادہ ہارمونی حرکت کرتا ہے اور اس کا زاویائی تعدد 200 rad./min ہے، تو اس کی ازحد رفتار کیا ہے؟

14.15 چاند کی سطح پر مادی کشش اسراع 1.7 m s^{-2} ہے۔ ایک سادہ پنڈولم کا چاند کی سطح پر دوری وقت کیا ہوگا، اگر زمین کی سطح پر اس کا دوری قوت 3.5 s ہے؟ (زمین کی سطح پر g کی قدر 9.8 m s^{-2} ہے۔)

14.16 مندرجہ ذیل سوالوں کے جواب دیجیے:

(a) ایک SHM کرتے ہوئے ذرہ کا دوری وقت، قوت مستقلہ k اور ذرہ کی کمیت m کے تابع ہے: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$
ایک سادہ پنڈولم تقریباً SHM کرتا ہے۔ پھر ایک پنڈولم کا دوری قوت اس کی کمیت کے تابع کیوں نہیں ہے؟

(b) ایک سادہ پنڈولم کی حرکت، کم زاویوں کے اہتزازات کے لیے تقریباً سادہ ہارمونی ہے۔ اہتزاز کے بڑے زاویوں کے لیے زیادہ پیچیدہ تجزیہ سے حاصل ہوتا ہے کہ T، $2\pi\sqrt{\dfrac{l}{g}}$ سے بڑا ہے۔ اس نتیجہ کے حق میں کیفیتی دلائل سوچیے۔

(c) ایک شخص، جس کے ہاتھ پر کلائی کی گھڑی بندھی ہے، ایک مینار سے نیچے گرتا ہے۔ کیا آزادانہ گرنے کے دوران، گھڑی درست وقت دے گی؟

(d) ارضی کشش کے تحت آزادانہ گرتے ہوئے کمرے میں نصب ایک سادہ پنڈولم کے اہتزاز کا تعدد کیا ہوگا؟

14.17 ایک سادہ پنڈولم، جس کی لمبائی l اور بوب کی کمیت m ہے، کار میں لٹکا ہوا ہے۔ کار ایک دائری راستے پر، جس کا نصف قطر R ہے یکساں رفتار v سے حرکت کر رہی ہے۔ اگر پنڈولم اپنے مقام توازن کے گرد، نصف قطری سمت میں چھوٹے اہتزاز کرتا ہے، تو اس کا دوری وقت کیا ہوگا؟

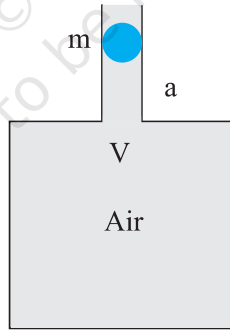
14.18 ایک کارک کا استوانی ٹکڑا، جس کی کثافت h اور اساسی رقبہ A، اونچائی h ہے، ρ_l کثافت کے رقیق میں تیرتا ہے۔ کارک کو تھوڑا سا دبا کر چھوڑ دیا جاتا ہے۔ دکھایئے کہ کارک اوپر نیچے سادہ ہارمونی طور پر اہتزاز کرتا ہے اور اس کا دور ہے:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{h\rho}{\rho_l g}}$$

(رقیق کی لزوجت کی وجہ سے لگنے والے قعر کو نظرانداز کر دیجیے)

14.19 ایک پارہ سے بھری ہوئی U-ٹیوب کا ایک سرا ایک چوس پمپ (Suction Pump) کے ایک سرے سے منسلک ہے اور دوسرا فضا سے۔ دونوں کالموں کے درمیان ایک چھوٹا دباؤ فرق قائم رکھا جاتا ہے۔ دکھایئے کہ جب چوس پمپ ہٹا لیا جاتا ہے تو U-ٹیوب میں پارہ کا کالم سادہ ہارمونی حرکت کرتا ہے۔

اضافی مشق

14.20 حجم v کے ہوا کے کمرہ کی گردن کا تراشی رقبہ a ہے، جس میں m کمیت کی ایک گیند بس فٹ ہو جاتی ہے۔ اور بنا رگڑ کے اوپر نیچے حرکت کر سکتی ہے (شکل 14.27)۔ دکھایئے کہ اگر گیند کو ذرا سا نیچے دبا کر چھوڑ دیا جائے تو وہ SHM کرتی ہے۔ اہتزازات کے دوری وقت کے لیے ریاضیاتی عبارت حاصل کیجیے۔ ہوا کے دباؤ- حجم تغیرات کو ہم تاپی فرض کر لیجیے۔ (دیکھیے شکل 14.27)

شکل 14.27 ہوا **(Air)**

14.21 آپ 3000 kg کمیت کی ایک گاڑی میں سواری کر رہے ہیں۔ فرض کیجیے آپ اس کے Suspension نظام کی اہتزازی خاصیتیں جانچ رہے ہیں 15 cm, Suspension نیچے جھک جاتا ہے، جب پوری گاڑی اس پر رکھ دی جاتی ہے اور اہتزاز کی سعت میں بھی، ایک مکمل اہتزاز کے دوران 50% کمی آ جاتی ہے۔ مندرجہ ذیل قدروں کا تخمینہ لگایئے: (a) اسپرنگ مستقلہ k (b) اسپرنگ اور شاک جاذب نظام کے ایک پہیے کے لیے قعر مستقلہ b، یہ مانتے ہوئے کہ ہر پہیہ 70 kg کو سہارا دیتا ہے۔

14.22 دکھایئے کہ خطی SHM میں ایک ذرہ کی ، اہتزاز کے ایک دور میں، اوسط حرکی توانائی ، یکساں دور میں اوسط توانائی بالقوۃ کے مساوی ہے۔

14.23 10kg کمیت کی ایک دائری قرص (ڈسک)، اس کے مرکز سے منسلک ایک تار کے ذریعے لٹکی ہوئی ہے۔ تار کو ڈسک کو گھما کر موڑا جاتا ہے اور پھر چھوڑ دیا جاتا ہے۔ مروڑی اہتزاز کا دوری وقت 1.5 s معلوم کیا گیا ہے۔ قرص کا نصف قطر 15 cm ہے۔ تار کا مروڑی اسپرنگ مستقلہ معلوم کیجیے۔ (مروڑی اسپرنگ مستقلہ a کی تعریف ہے: $J = -\alpha\ \theta$ ، جہاں J، بحالی پیچ اور θ مروڑ کا زاویہ ہے۔

14.24 ایک جسم، 5 cm سعت اور 0.2s دور کے ساتھ سادہ ہارمونی حرکت کرتا ہے۔ جسم کا اسراع اور اس کی رفتار معلوم کیجیے، جبکہ نقل ہے (a) 5 cm (b) 3 cm (c) 0 cm۔

14.25 ایک اسپرنگ سے منسلک ایک کمیت، بغیر رگڑ یا قعر کے، ایک افقی مستوی میں، زاویائی تعدد ω کے ساتھ اہتزاز کرنے کے لیے آزاد ہے۔ وقت $t = 0$ پر اسے فاصلہ x_0 تک کھینچا جاتا ہے اور مرکز کی طرف رفتار v_0 سے ڈھکیلا جاتا ہے۔ پیرا میٹروں x_0, ω اور v_0 کی شکل میں، اس میں پیدا ہونے والے اہتزازوں کی سعت معلوم کیجیے۔ [اشارہ: مساوات $x = a\ \cos(\omega t + \theta)$ سے شروع کیجیے اور نوٹ کیجیے کہ آغازی رفتار منفی ہے۔]